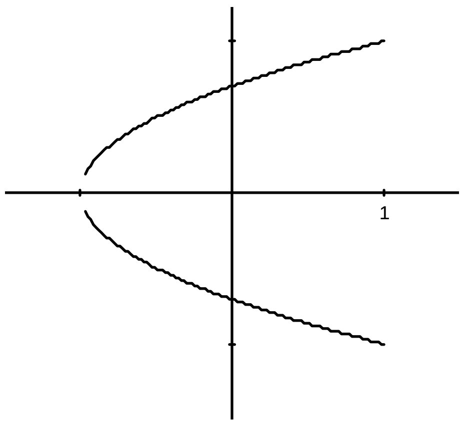
PARAMETERFUNKTIONEN

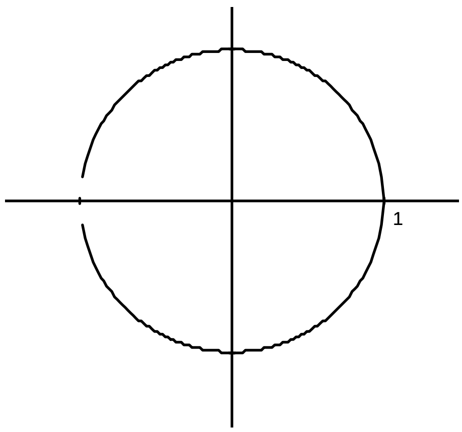
Zwei Beispiele:



$x = 2t^2 - 1$

$y = t$

$-\infty < t < +\infty$



$x = \cos\varphi$

$y = \sin\varphi$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

Für die Parameter t und φ sind das im angegebenen Bereich Funktionen, d.h. zu jedem Parameterwert gehört genau ein Punkt.

Der Parameter lässt sich oft eliminieren:

$$x = 2y^2 - 1$$
$$2y^2 = x + 1$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{x+1}{2}}$$
$$-1 \leq x < \infty$$

$$x^2 + y^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$
$$-1 \leq x \leq 1$$

Es sind mehrere Funktionen nötig, um das gleiche Kurvenbild zu erzeugen!

DIE ABLEITUNG EINER PARAMETERFUNKTION

Das Symbol y' für die 1. Ableitung stammt von Newton, dem einen Erfinder der Differentialrechnung.

Gleichzeitig stellte Leibnitz ebenfalls eine Theorie der Differentialrechnung auf; er benützte für die 1. Ableitung das Symbol $\frac{dy}{dx}$.
Der Vorteil dieses Symbols ist, dass man sieht, nach welcher Variablen abgeleitet wird.

Gegeben sei die Parameterfunktion

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Mit der Schreibweise von Leibnitz ergibt sich:

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \Rightarrow \quad dx = f'(t) \cdot dt$$
$$\frac{dy}{dt} = g'f(t) \quad \Rightarrow \quad dy = g'(t) \cdot dt$$

Durch Division der beiden Differentiale erhält man die Steigungsfunktion:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

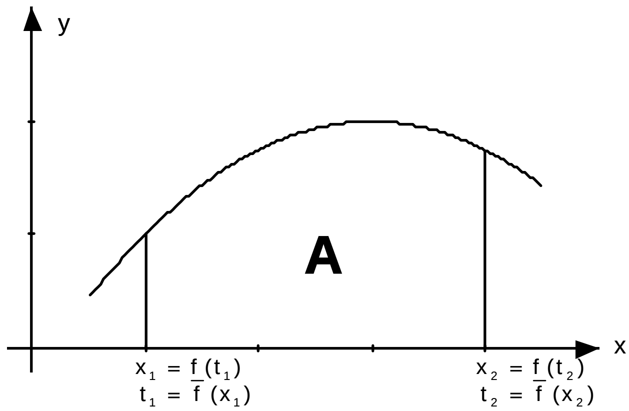
Bestimmen Sie die Steigungsfunktionen der Beispiele von Seite 1!

FLÄCHENBERECHNUNG

Damit man eine Fläche (oder ein Volumen) berechnen kann, müssen im Intervall $[t_1;t_2]$ folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

> $x = f(t)$ ist stetig, streng monoton, differenzierbar und diese Ableitung ist stetig
> $y = g(t)$ ist stetig und $y \geq 0$ (oder $y \leq 0$)

dann existiert eine Umkehrfunktion $t = \bar{f}(x)$ und es gilt: $y = g(t) = g\big(\bar{f}(x)\big)$.



und der Inhalt der Fläche A lässt sich berechnen:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx \quad = \int_{x_1}^{x_2} g\big(\bar{f}(x)\big)dx \qquad \text{dabei ist: } x_1 = f(t_1) \text{ und } x_2 = f(t_2)$$

wir substituieren:

$$x = f(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \Rightarrow \quad dx = f'(t)\cdot dt$$

Für den Inhalt der Fläche gilt:

$$\boxed{\mathbf{A = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,f'(t)\;dt}}$$

ROTATIONSVOLUMEN

Analog zur Flächenberechnung gilt für das von einem vorgehend definierten Flächenstück erzeugte Rotationsvolumen:

Rotation um die x-Achse:

$$V_1 = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx$$

ergibt mit der Substitution

$x = f(t)$ und $dx = f'(t)\,dt$
$y = g(t)$

$$\boxed{V_1 = \pi \int_{t_1}^{t_2} g^2(t)\, f'(t)\, dt}$$

Rotation um die y- Achse:

$$V_2 = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$$

ergibt mit der Substitution

$x = f(t)$
$y = g(t)$ und $dy = g'(t)\,dt$

$$\boxed{V_2 = \pi \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, g'(t)\, dt}$$

TECHNISCHE DETAILS

Zur Tabellengestaltung

Oben am Blatt die Formeln angeben

Zusätzliche Parameter benennen:

z. B.	a	2
	b	3

Ganzen Viererblock markieren: EINFÜGEN → NAMEN → ERSTELLEN

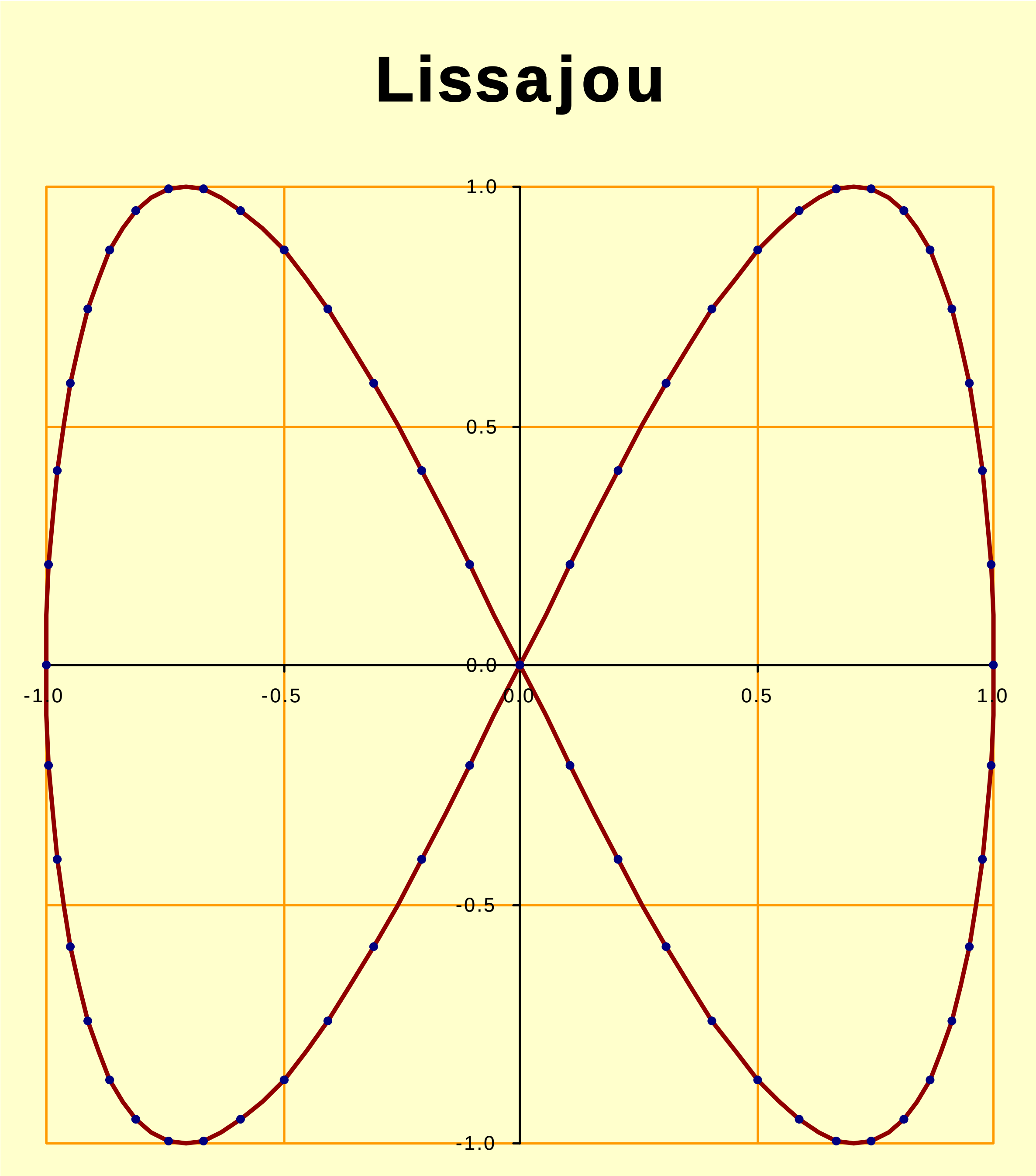
t-Wertereihe erstellen, x-Werte und y-Werte berechnen

Tipps zum Graphen

Markieren Sie alle x- und y-Werte.
Erstellen Sie ein "Punkt(xy) – Diagramm mit Punkten und interpolierten Linien"
Setzen Sie einen passenden Titel
Löschen Sie die Legende
Horizontale und vertikale Gitternetzlinien (unter Diagrammoptionen) in gleichen Abständen, Diagramm von Hand so formen, dass ein Netz von Quadraten entsteht
Allenfalls Skaleneinteilung anpassen.
Skalenbeschriftung unauffällig klein
Für die Datenpunkte kleine Kreise wählen

Wenn Sie einmal ein Diagramm haben, das Ihnen gefällt, können Sie es weiterverwenden:

- Diagramm kopieren
- Auf dem neuen Tabellenblatt einfügen
- Kontextmenü zu einem Datenpunkt → Datenquelle
- die x- und y-Werte in der neuen Tabelle auswählen


Lissajou
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0

Wertetabellen bei Winkelfunktionen

Excel rechnet mit Winkeln im Bogenmass: π entspricht 180°.

Um eine sinnvolle Zahlenfolge für den Parameter t zu erstellen sind zwei Verfahren denkbar:

1. Wertetabelle erstellen (am Beispiel von $\frac{\pi}{30}$-Schritten):

   - oberste Zelle: 0
   - folgende Zelle: =PI()/30
   - diesen Wert kopieren und als Wert einfügen
   - beide Zellen auswählen und nach unten kopieren

   ("Wert einfügen": Bearbeiten → Inhalte einfügen . . . → Werte
   Schneller: falls vorhanden Symbol  in der Symbolleiste benützen)

2. In einer ersten Spalte die Werte in Grad eingeben
   In der nächsten Spalte die Werte ins Bogenmass umrechnen: $\frac{\text{Grad} \cdot \pi}{180}$

INTERESSANTE PARAMETERFUNKTIONEN

Altbekannt: Geraden

$x = a + b \cdot t$
$y = c + d \cdot t$

Daten für t: Schrittweite: 0.5
Bereich: [-5;5]

Polynome 1

$x = 2t^2 - 1$
$y = t$

Daten für t: Schrittweite: 0.25
Bereich: [-2;2]

Polynome 2

$x = t^2$
$y = t^3 / 4$

Daten für t: Schrittweite: 0.2
Bereich: [-1;1]

Um eine Polynomfunktion handelt es sich nur in der Parameterdarstellung.
Wenn man t eliminiert erhält man eine sogenannte algebraische Gleichung:

$$16y^2 = x^3 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^3} / 4$$

Kreis und Co

$x = a\cos(t)$
$y = b\sin(t)$

Daten für t:	Schrittweite:	$\pi / 15$ oder 12°
	Bereich:	[0;2] $[0;2\pi]$ oder [0;360°]

Rosenkurven

$x = \sin(nt)\cos(t)$
$y = \sin(nt)\sin(t)$

Daten für t:	Schrittweite:	$\pi / 30$ oder 6°
	Bereich:	$[0;2\pi]$ oder [0;360°]

Variieren Sie den Bereich: [0;180°] oder [0;90°] oder [0;360°]
und n=

1, 2, 3, . . .
-1, -2, . . .
0.5, 1.5, 0.8, . . .

Achtung: für grössere n haben Sie eine zu grosse Schrittweite

Lissajou-Figuren

$x = \sin(pt)$
$y = \sin(qt)$

Daten für t:	Schrittweite:	$\pi / 30$ oder 6°
	Bereich:	$[0;2\pi]$ oder [0;360°]

Herz

$x = a\sin(t)$
$y = a(1 + \cos(t) + \sin^2(t))$

Daten für t:	Schrittweite:	$\pi / 15$ oder 12°
	Bereich:	$[0;2\pi]$ oder [0;360°]

Spiralen

Spiralen werden am schönsten mit Polarkoordinaten beschrieben:

$$r = a \cdot \varphi, \quad r = e^{a\varphi}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

dabei ist r die Länge des Ortsvektors des Punktes und φ dessen Winkel mit der x-Achse.

Siehe auch: http://www.mathematische-basteleien.de/spirale.htm

Archimedische Spirale

$x = at\cos(t)$
$y = at\sin(t)$

Daten für t:	Schrittweite:	π / 12 oder 15°
	Bereich:	[0; 6π] oder [0;1080°]

Logarithmische Spirale

$x = e^{at}\cos(t)$
$y = e^{at}\sin(t)$

Daten für t:	Schrittweite:	π / 12 oder 15°
	Bereich:	[0; 4π] oder [0; 720°]

Hyperbolische Spirale (Krummstab)

$x = \cos(t) / \sqrt{t}$
$y = \sin(t) / \sqrt{t}$

Daten für t:	Schrittweite:	π / 12 oder 15°
	Bereich:	[0; 6π] oder [0;1080°]

Zykloide

Eine Gewöhnliche Zykloide ($r = a$) entsteht, wenn man den Weg eines Punktes auf dem Umfang des Kreises mir Radius r verfolgt, während der Kreis auf der x-Achse abrollt.
Für $a < r$ liegt der Punkt im Innern des Kreises (verkürzte Zykloide)
Für $a > r$ liegt der Punkt ausserhalb des Kreises (aber mit dem Kreis fest verbunden) und man erhält eine verlängerte Zykloide.

$x = r\,t - a\sin(t)$
$y = r - a\cos(t)$

Daten für t:	Schrittweite:	π / 6 oder 30°
	Bereich:	$[0; 4\pi]$ oder $[0; 720°]$

Interessantes zur Zykloide:

http://de.wikipedia.org/wiki/Zykloide
http://www.geogebra.at/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/lwolf/zykloiden/zykloiden.html
http://www.math.uni-wuppertal.de/~frommer/SiTe/epi.html

Interessante Arbeitblätter zum Thema:

http://www.lehrer.uni-karlsruhe.de/~za186/CAS/m5_2_p.htm