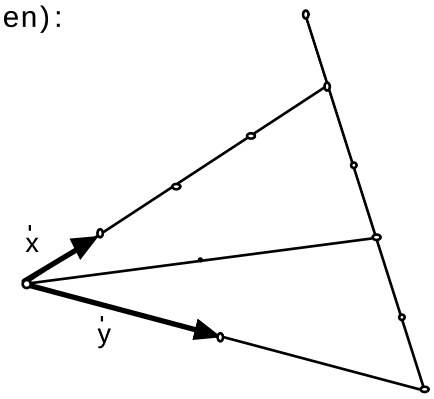
1. Die gezeichneten Punkte unterteilen die Strecken in je gleich lange Abschnitte. Berechnen Sie aus $\vec{x}$ und $\vec{y}$ (Resultate möglichst vereinfachen):



$\overrightarrow{UW} = 2\vec{y} - 4\vec{x}$

$\overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}\overrightarrow{UW} = \frac{1}{2}(2\vec{y} - 4\vec{x}) = \vec{y} - 2\vec{x}$

$\overrightarrow{TU} == \frac{1}{2}\overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{x}$

$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UT} = 4\vec{x} - (\frac{1}{2}\vec{y} - \vec{x}) = 5x - \frac{1}{2}\vec{y}$

3 Punkte

2. Eine Pyramide mit der Spitze S hat als Grundfläche ein Trapez; die Vierecke AMCD und MBCD sind Parallelogramme. M ist der Mittelpunkt der Strecke AD. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$. Berechnen Sie daraus:

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

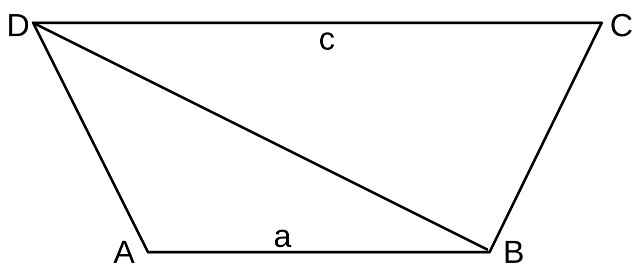
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{SC} = \vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \overrightarrow{AM} = \vec{b} + (\frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$

3 Punkte

3.

Gegeben sind die Punkte: $A(5|-1|9)$, $B(8|-1|0)$, $D(-4|5|6)$



a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ABD

$x = \frac{5+8-4}{3} = 3, \quad y = \frac{5-1-1}{3} = 1, \quad z = \frac{9+0+6}{3} = 5, \quad S(3|1|5)$

2 Punkte

b) Die Punkte ABCD bilden ein Trapez, mit $c = \frac{5}{3}a$.

Berechnen Sie den Vektor $\overrightarrow{DC}$ und die Koordinaten der Ecke C!

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ -1+1 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(1|5|-9)$$

4 Punkte

4. ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck (Schenkel AB und BC);
$A(4|3|-6)$, $B(2|6|1)$; C liegt auf der x-Achse.

a) Berechnen Sie die Länge des Schenkels AB exakt!

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 6-3 \\ 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{4+9+49} = \sqrt{62}$$

b) Wie heissen die Koordinaten von C ?

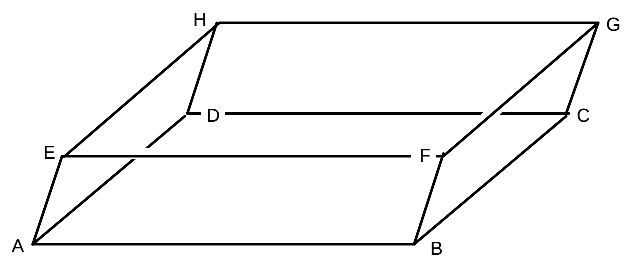
C liegt auf der x-Achse, also: $C(x|0|0)$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 0-6 \\ 0-1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad BC^2 = (x-2)^2 + 36 + 1 = 62 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x-2 = \pm 5$$

7 Punkte

$C_1(7|0|0)$, $C_2(-3|0|0)$

5. Gegeben sind die Punkte: $A(-2|5|-7)$
$B(8|15|-2)$
$C(15|11|2)$
$D(5|1|-3)$



a) Zeigen Sie, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.

3 Punkte

z. B. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8+2 \\ 15-5 \\ -2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 15-5 \\ 11-1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Seiten sind parallel und gleich lang, was zu beweisen war.

2 Punkte

b) Berechnen Sie den Diagonalenschnittpunkt.

Mittelpunkt von BD (oder von AC): $M\left(\frac{8+5}{2}\middle|\frac{15+1}{2}\middle|\frac{-2-3}{2}\right) = M(6.5|8|-2.5)$

2 Punkte

d) Das Parallelogramm ist Grundfläche eines sogenannten Spats (siehe Figur).

Es ist $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Koordinaten der Ecke G.

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(14|13|6)$$