

1. Berechnen Sie den Winkel, den die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = -18 - 32 + 0 = -50 = \sqrt{36 + 64} \cdot \sqrt{9 + 16 + 144} \cdot \cos \gamma = 10 \cdot 13 \cdot \cos \gamma$$

$$-50 = 130 \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = -\frac{5}{13} \Rightarrow \gamma = 112.6^\circ$$

2. Welche der folgenden Vektoren sind gleich lang? welche stehen senkrecht aufeinander?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 36 + 36 + 9 = 81 \\ b^2 &= 1 + 4 + 4 = 9 \\ c^2 &= 49 + 16 + 16 = 81 \end{aligned} \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind gleich lang.}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 - 12 + 6 = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= 42 + 24 - 12 \neq 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= 7 - 8 - 8 \neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{a} \text{ steht senkrecht auf } \vec{b}$$

3. Es sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ x \\ 2y - x \end{pmatrix}$;

Bestimmen Sie x und y so, dass das \vec{z} rechtwinklig zu \vec{a} und rechtwinklig zu \vec{b} ist.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{z} &= 18 + 4x - 2(2y - x) = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{z} &= -6 + x + 2y - x = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4y = -18 \\ 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3, x = -1$$