1. Gegeben sind die Ebene E: $4x - y + 8z + 15 = 0$ und der Punkt $P(9|1|14)$

a) Legen Sie eine Senkrechte zur Ebene durch den Punkt, bestimmen Sie deren Durchstosspunkt mit der Ebene und berechnen Sie daraus den Abstand des Punktes von der Ebene.

Halten Sie sich an den Text, der Schritt für Schritt die Lösungsart vorgibt! Sehr viele von Ihnen scheinen nicht lesen zu können!

Die Senkrechte zu Ebene hat den Richtungsvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, daraus ergibt sich die

Geradengleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Den Schnittpunkt berechnet man, indem man die Geradengleichung in der Ebenengleichung einsetzt:

$$4(9 + 4t) - (1 - t) + 8(14 + 8t) + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Der Durchstosspunkt ist: $D(9 - 2 \cdot 4 | 1 + 2 | 14 - 2 \cdot 8) = D(1|3|-2)$

Nun lässt sich der gesuchte Abstand als Abstand der Punkte P und D berechnen:

$$\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad DP = \sqrt{64 + 4 + 16^2} = 18$$

b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes von der Ebene auf eine zweite Art.

Hier könnte man die üblichste Methode wählen: die Formel von Hesse!

$\sqrt{16 + 1 + 64} = 9$, daraus ergibt sich die Hessesche Form der Geradengleichung:

$$\frac{4x - y + 8z + 15}{9} = 0$$

Für (x|x|z) die Koordinaten des Punktes einsetzen ergibt den Abstand:

$$d = \frac{4 \cdot 9 - 1 + 8 \cdot 14 + 15}{9} = 18$$

2. Gegeben ist die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Eine Ebene enthält die Gerade g und den Punkt $D(7|8|-5)$.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene.

Was benötigt man für eine Ebenengleichung? Einen Normalenvektor und einen Punkt, oder zwei Vektoren in der Ebene, aus denen sich der Normalenvektor berechnen lässt.

Ein Vektor in der Ebene ist gegeben: $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

den zweiten kann man aus den Punkten $(3|6|0)$ und $D(7|8|-5)$ berechnen: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \quad // \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich die Ebenengleichung:: $2x + y + 2z = 2 \cdot 3 + 6 + 2 \cdot 0 = 12$

b) Ein Punkt P liegt auf der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass er von $M(5|4|-1)$ den Abstand 6 hat.

Ein Punkt auf g hat die Koordinaten $P(3-2t|6+2t|t)$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ 6+2t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2t \\ 2+2t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors soll 6 sein, ich arbeite mit dem Quadrat der Länge:

$$\begin{aligned} (-2-2t)^2 + (2+2t)^2 + (t+1)^2 &= 36 \\ 4 + 8t + 4t^2 + 4 + 8t + 4t^2 + t^2 + 2t + 1 &= 36 \\ 9t^2 + 18t - 27 &= 0 \\ t^2 + 2t - 3 &= 0 \\ (t+3)(t-1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -3, \quad t_2 = 1 \end{aligned}$$

(oder Gleichung mit TR lösen)

Es gibt 2 Punkte: $P_1(1|8|1)$ und $P_2(9|0|-3)$

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $H(1|1|15)$ von der Geraden g indem Sie eine Ebene normal zu g durch H legen und so den Lotfusspunkt F bestimmen.

Auch hier gilt: Aufgabe genau lesen!

Die Ebene hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und geht durch $H(1|1|15)$:

$$-2x + 2y + z = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 15 = 15$$

Der Lotfusspunkt F ist der Schnittpunkt dieser Ebene mit g:

$$-2(3-2t) + 2(6+2t) + (t) = 15 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad F(1|8|1)$$

Der Abstand des Punktes H von der Geraden ist gleich dem Abstand FH

$$\overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad FH = \sqrt{0 + 49 + 14^2} = 7\sqrt{5}$$

3. Gegeben sind zwei Ebenen: $E_1\colon\ 7x - y + 4z = 25$

$E_2\colon\ 2x - 2y + z = 8$

a) P ist ein Punkt der xy-Ebene, der sowohl in E_1 als auch in E_2 liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

Ein Punkt der xy-Ebene hat die Koordinaten $(x|y|0)$, was wir in den Ebenengleichungen einsetzen:

$$\left| \begin{array}{l} 7x - y = 25 \\ 2x - 2y = 8 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad x = 3.5,\ y = -0.5 \quad \Rightarrow \quad (3.5|-0.5|0)$$

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

Sie können auf ähnliche Art einen zweiten Punkt bestimmen, indem Sie z. B. z=0 setzen und aus den beiden Punkten die Geradengleichung herleiten.

Oder: Sie wissen, dass der Richtungsvektor der Geraden senkrecht auf den beiden Normalenvektoren steht;

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$