INTEGRALRECHNUNG 1

NAME:

19.05.07 | 5F-5 | FLÜ | KURZKLAUSUR

A

---

1. Welche Fläche schliessen die Graphen von $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 4$ ein?

Schnittstellen: $4 - x^2 = x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad 8 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

Differenzfunktion: $f(x) - g(x) = 4 - x^2 - (x^2 - 4) = 8 - 2x^2$

$$A = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3} - \left(\frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3}$$

2. Die Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ hat genau eine Nullstelle.
Welche Fläche schliesst ihr Graph im Bereich [-1;2] mit der x-Achse ein?

Nullstelle: $2x^3 - x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ (Taschenrechner)

zur Ersparnis von Schreibarbeit: die Stammfunktion von f(x) ist: $\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x$

$$\left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4\right) = -\frac{7}{3} - \frac{19}{3} = -\frac{26}{3}$$

$$\left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x\right]_{1}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3} + 6 - 8\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{3} = \frac{17}{3}$$

$$A = \left|-\frac{26}{3}\right| + \frac{17}{3} = \frac{43}{3}$$

3. Wie gross muss a sein, damit die Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = a \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$ und der x-Achse den Inhalt 8 hat?

Nullstellen: $a \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

Fläche: $$\int_{-2}^{2} a \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = a\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = a\left(2 - \frac{2}{3}\right) - a\left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{3} + \frac{4a}{3} = \frac{8a}{3}$$

Gleichung: $\frac{8a}{3} = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3$