Lesen Sie die Aufgabe und rechnen Sie nicht einfach drauflos! Es wurde so viel gerechnet, das gar nicht verlangt war – das ist Zeitverschwendung.
Benützen Sie die gegeben Ableitungen bei der 5b!
Verschwenden Sie ihre Zeit auch nicht mit 2. Ableitungen, wenn Sie Gescheiteres tun könnten als zwei drittel Seiten rechnen für nur einen Punkt.

1. In welchen Punkten (ausser dem Nullpunkt) haben f: $y=x^2$ und g: $y=x^3$ parallele Tangenten?

$$\begin{array}{lll} f: & y = x^2 & y' = 2x \\ g: & y = x^3 & y' = 3x^2 \end{array} \qquad 3x^2 = 2x \quad (\text{gleiche Steigung} \;\Leftrightarrow\; f' = g')$$

$$3x^2 - 2x = x(3x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1 = 0),\; x_2 = \tfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F(\tfrac{2}{3}|\tfrac{4}{9}) \\ G(\tfrac{2}{3}|\tfrac{8}{9}) \end{array}$$

2. Berechnen Sie für f: $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ die schiefe Asymptote.

Der Grad des Zählers ist um 1 grösser als der des Nenners, also dividieren.

$$y = \frac{2x^2}{x+1} = 2x^2 : (x+1) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}\,, \quad \text{die Asymptote ist: } y = 2x - 2$$

3. Bestimmen Sie im Intervall $[0;360°]$ alle Wendestellen von $y = \cos(2x)$.

Wendepunkt $\Leftrightarrow$ $f'' = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) \\ f'(x) &= -2\sin(2x) \\ f''(x) &= -4\cos(2x) = 0 \\ \cos(2x) &= 0 \\ 2x &= \cos^{-1}(0) \end{aligned}$$

Kettenregel!

$$2x = 90^o + k \cdot 180^o \qquad \text{oder} \qquad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\mathbf{x = 45^o + k \cdot 90^o} \qquad\qquad \mathbf{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{16 - 4x}$.

a) Berechnen Sie den Definitionsbereich und die Achsenschnittpunkte der Funktion.

b) Im Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse wird die Tangente gelegt.
Geben Sie ihre Gleichung an.

c) Die Funktion umschliesst mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück A.
Dieses Flächenstück A rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des dadurch beschriebenen Rotationskörpers. (Exakt!).

a) $16 - 4x \geq 0$

$16 \geq 4x$ (Der Radikand darf nicht negativ sein)

$4 \geq x$ $\qquad \mathbb{D} = \left]-\infty; \mathbf{4}\right]$

Achsenschnittpunkte: **(4|0)** und **(0|4)**

b) $f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{16-4x}} = -\frac{2}{\sqrt{16-4x}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$ (-4 wegen Kettenregel)

Tangentengleichung: $\mathbf{y = -\frac{1}{2}x + 4}$

c) $V = \pi\int_0^4 (16 - 4x)\,dx = \pi\left[16x - 2x^2\right]_0^4 = \pi(64 - 32) - 0 = \mathbf{32}\pi$

5. Gegeben ist:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + a}{x - 2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 8 - a}{(x - 2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2(a - 4)}{(x - 2)^3}$$

a) Leiten Sie die gegebenen Ableitungen her.

b) Setzen Sie $a = 8$ und untersuchen Sie die Funktion $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$

in Bezug auf:
Pole, Asymptoten, Nullstellen und Extrema und Wendepunkte.

c) Betrachten Sie nun wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$.
Wie gross müssen Sie a wählen, damit die Funktion ein Minimum an der Stelle $x = 3$ hat?

a) $$f'(x) = \frac{(2x - 4)\cdot(x - 2) - 1\cdot(x^2 - 4x + a)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 8 - a}{(x - 2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x - 4)\cdot(x - 2)^2 - 2(x - 2)\cdot(x^2 - 4x + 8 - a)}{(x - 2)^4}$$
$$= \frac{(2x - 4)\cdot(x - 2) - 2\cdot(x^2 - 4x + 8 - a)}{(x - 2)^3} = \frac{2a - 8}{(x - 2)^3} = \frac{2(a - 4)}{(x - 2)^3}$$

b) Pol bei $\mathbf{x = 2}$

Asymptote für $x \to \pm\infty$ ist $\mathbf{y = x - 2}$

denn:
$$(x^2 - 4x + 8) : (x - 2) = x - 2 + \frac{4}{x - 2}$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^2 - 2x} \\ \quad -2x + 8 \\ \quad \underline{-2x + 4} \\ \qquad\quad 4 \end{array}$$

Nullstellen: $x^2 - 4x + 8 = 0$ hat keine Lösungen; **keine Nullstellen**

Extrema: $x^2 - 4x + 8 - 8 = x^2 - 4x = x(x - 4) = 0$ (siehe geg. f'(x)!)

Maximum in $\mathbf{(0|-4)}$

Minimum in $\mathbf{(4|4)}$

Wendepunkt: $f''(x) = \frac{2(8 - 4)}{(x - 2)^3} = 0$ hat keine Lösung; **kein Wendepunkt**

c) $x^2 - 4x + 8 - a = 0$ für $x = 3$

$9 - 12 + 8 - a = 0$

$\mathbf{a = 5}$

6. Betrachten Sie die Funktion $f_t(x) = x^3 - 6tx^2 + 9t^2x$.

a) Setzen Sie $t = 3$ und berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

b) Für welches t hat der Graph von f_t an der Stelle $x = 9$ einen Wendepunkt?

. a) $f_3(x) = x^3 - 18x^2 + 81x$
$f_3'(x) = 3x^2 - 36x + 81$
$f_3''(x) = 6x - 36$

Wendepunkt für: $f_3''(x) = 6x - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad W(6|54)$

Die Tangente hat die Steigung: $f_3'(6) = -27$

Tangentengleichung: $y - 54 = -27(x - 6) \quad \Rightarrow \quad y = -27x + 216$

b) $f_t(x) = x^3 - 6tx^2 + 9t^2x$
$f_t'(x) = 3x^2 - 12tx + 9t^2$
$f_t''(x) = 6x - 12t$

$f_t''(9) = 54 - 12t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4.5$