

1. Gegeben sind die Ebene ε durch die Punkte $P(4 | 3 | 4)$, $Q(5 | 4 | 4)$ und $R(4 | 4 | 6)$ sowie die Gerade $g=AB$ mit $A(4 | 5 | 6)$ und $B(2 | 6 | 7)$.
- Stellen Sie eine Koordinatengleichung von ε und eine Parametergleichung für g auf.
Lassen Sie diese Aufgabe von mir kontrollieren, bevor Sie weiterrechnen!
 - Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und ε .
 - Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen g und ε .
 - Der Punkt $U(-1 | -4 | -9)$ wird an ε gespiegelt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes U' .
 - Berechnen Sie den Abstand des Punktes $T(6 | -6 | 9)$ von der Ebene ε .
 - Wie gross ist der Abstand des Punktes $T(6 | -6 | 9)$ von der Geraden g ?

[Matur TSME 1995]

a) Ebene ε durch PQR: $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene ε : $2x - 2y + z = 6$ **Prüfen, indem man alle drei Punkte einsetzt!**

Gerade g durch AB: $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Schnittpunkt von g und ε :
 $2(4 - 2t) - 2(5 + t) + (6 + t) = 6 \Rightarrow t = -0.4 \Rightarrow S(4.8 | 4.6 | 5.6)$

$$c) \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = |-4 - 2 + 1| = 5 = \sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+4+1} \cdot \sin \alpha$$

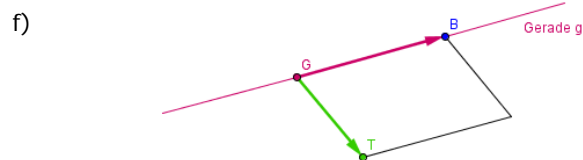
$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{3\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 42.9^\circ$$

$$d) \quad \text{Lot von U auf } \varepsilon: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnitt mit } \varepsilon \text{ f\"ur:} \quad 2(-1+2t) - 2(-4-2t) + (-9+t) = 6 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Spiegelpunkt } U' \text{ f\"ur:} \quad t = 2 \Rightarrow U'(3 | -8 | -7)$$

$$e) \quad \text{Formel von Hesse:} \quad d = \frac{2 \cdot 6 - 2 \cdot (-6) + 9 - 6}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{27}{3} = 9$$



Fläche und Grundlinie des Parallelogramms berechnen:

$$\text{Fläche } F: \quad \overrightarrow{GT} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -8 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \sqrt{14^2 + 64 + 20^2} = \sqrt{660}$$

$$\text{Grundlinie } a: \quad a = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\text{Der Abstand } d' \text{ entspricht der Länge der Höhe im Parallelogramm:} \quad d' = \frac{\sqrt{660}}{\sqrt{6}} = \sqrt{110}$$