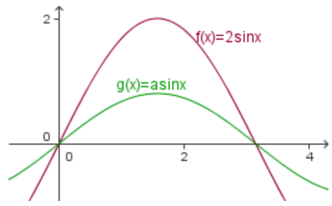
1. f: $f(x) = 2\sin x$

g: $g(x) = a\sin x$



Eine der kleinen Flächen zwischen f und g hat den Inhalt 2.4.
Berechnen Sie a

Die Sinuskurve schneidet die Achse in 0 und π (=180°).

$$2.4 = \int_0^{\pi} (f - g)\, dx = \int_0^{\pi} (2\sin x - a\sin x)\, dx = (2 - a)\int \sin x\, dx = (2 - a)\Big[-\cos x\Big]_a^b$$

$$2.4 = (2 - a)(1 + 1) \quad \Rightarrow \quad a = 0.8$$

2. $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$

$f'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c) \cdot e^x$

Bestimmen Sie die Parameter a, b, c so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- f schneidet die y-Achse bei 1
- f geht durch den Punkt $P(1|-e)$
- f hat ein Extremum bei $x = 2$.

$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$

$f(1) = -e \quad \Rightarrow \quad (a + b + 1) \cdot e = -e \quad \Rightarrow \quad a + b = -2$

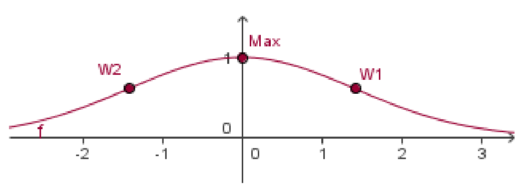
$f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (4a + b + 4a + 2b + 1) \cdot e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + 3b = -1$

$$\left| \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -2 \\ 8a & + & 3b & = & -1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ b = -3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x^2 - 3x + 1) \cdot e^x$$

4. Berechnen Sie die Koordinaten $(x|y)$ aller Extremal- und Wendepunkte der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$ (exakt!)

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Das Extremum (Maximum) ist in $M(0|1)$



Produktregel für die 2. Ableitung!

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2$$

Wendepunkte bei $W_{1,2}\ (\pm\sqrt{2}\,|\,e^{-0.5})$

3. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = -e^{2x} + 3$.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von f mit den Koordinatenachsen exakt.

b) Unter welchem Winkel schneidet f die y -Achse?

c) Vom Punkt $P(0|3)$ aus soll eine Tangente t an die Kurve f gelegt werden. Bestimmen Sie die Gleichung von t.

a) Schnitt mit der y-Achse: $x = 0$ $\quad y = -e^0 + 3 = -1 + 3 = 2$

Schnitt mit der x-Achse: $y = 0$

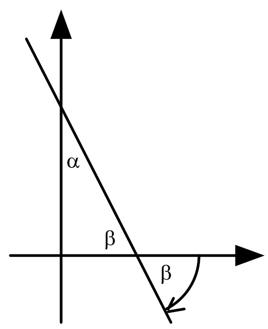
$$\begin{aligned} 0 &= -e^{2x} + 3 \\ e^{2x} &= 3 \\ 2x &= \ln 3 \\ x &= \frac{\ln x}{2} = \ln\sqrt{x} \end{aligned}$$

b) $f'(x) = -2e^{2x}$

$f'(0) = -2e^0 = -2 = \tan\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -63.43°$

Gesucht ist der Winkel mit der y-Achse:

$\alpha = 90° - |\beta| = 26.57°$



c) Sei $B(u|-e^{2u} + 3)$ der Berührungspunkt auf f.

dann gilt für die Steigung der Tangente:

$$\frac{3 - (-e^{2u} + 3)}{0 - u} = -2e^{2u}$$

$$\frac{e^{2u}}{-u} = -2e^{2u} \qquad \Big| : e^{2u} \quad \cdot -u$$

$$1 = 2u$$

$$u = \frac{1}{2}$$

Der Berührungspunkt ist also bei $u = 0.5$, die Steigung in diesem Punkt ist $f'(0.5) = -2e^1$

und für die Gleichung der Tangente gilt: $y = -2ex + 3$