

1. Eine Gerade mit der Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

8 Pkte

geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Sie schneidet die Kugel in zwei Punkten. Legen Sie im Schnittpunkt, der näher beim Nullpunkt liegt, eine Tangentialebene an die Kugel.

Geben Sie die Gleichung dieser Tangentialebene an.

2. Gegeben sind: eine Ebene: E:  $x - 2y + 2z = 3$   
und eine Kugel: k:  $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 9)^2 = 36$

2 Pkte

a) Wie gross ist der kleinste Abstand der Kugel von der Ebene?

5 Pkte

b) Welcher Punkt B der Kugel liegt der Ebene am Nächsten?

5 Pkte

c) H:  $x - 2y + 2z = 21$  ist eine Parallelebene von E. Sie schneidet die Kugel in einem Kreis. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

1. Mittelpunkt:  $M(1 \mid -2 \mid 1)$  Gerade:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der Kugel: einsetzen!

$$(1 + 2t - 1)^2 + (-2 - t + 2)^2 + (1 + 3t - 1)^2 = 36$$

$$4t^2 + t^2 + 9t^2 = 36$$

$$t = \pm 2 \Rightarrow S_1(5 \mid -4 \mid 7), S_2(-3 \mid 0 \mid -5)$$

$S_2$  liegt näher beim Nullpunkt;  $\overline{S_2M} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Tangentialebene:  $2x - y + 3z = 2 \cdot (-3) - 0 + 3 \cdot (-5) = -21 \Rightarrow \mathbf{2x - y + 3z + 21 = 0}$

2. a) Abstand des Mittelpunktes  $M(4 \mid -4 \mid 9)$  von der Ebene  $E: x - 2y + 2z = 3$

$$\text{Formel von Hesse: } \frac{4 - 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 9 - 3}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{27}{3} = 9$$

Der Abstand des nächstgelegenen Kugelpunktes ist um  $r = 6$  kleiner: also  $d = 3$

b) Gerade senkrecht zur Ebene durch M: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit der Kugel:

$$(4 + t - 4)^2 + (-4 - 2t + 4)^2 + (9 + 2t - 9)^2 = 36$$

$$t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 36$$

$$t = \pm 2 \Rightarrow S_1(6 \mid -8 \mid 13), S_2(2 \mid 0 \mid 5)$$

Abstand des 2. Punktes von der Ebene: 
$$\frac{2 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 3}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$$

Der gesuchte Punkt ist  $S_2$

- c) Schnitt der Parallelebene mit der Geraden aus b)

$$(4 + t) - 2(-4 - 2t) + 2(9 + 2t) = 21$$

$$30 + 9t = 21 \Rightarrow t = -1$$

Der Mittelpunkt des Kreises ist  $M'(3 \mid -2 \mid 7)$

$$MM' = \sqrt{(3 - 4)^2 + (-2 + 4)^2 + (7 - 9)^2} = 3$$

Aus der Zeichnung ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras der Radius  $r'$  des Kreises:

$$r'^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow r' = 3\sqrt{3}$$

