

THURGAUISCH-SCHAFFHAUSERISCHE
MATURITÄTSSCHULE FÜR ERWACHSENE

VORPRÜFUNG 2007

MATHEMATIK: 2 STUNDEN

ALLGEMEINES: Bei jeder Aufgabe ist mit einem **neuen Blatt** zu beginnen und dieses mit **Ihrem Namen** zu versehen.

Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit Ihren Lösungen abzugeben.

HILFSMITTEL: Nicht-programmierbarer, nicht-grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS-System. Formelsammlung DMK mit eigenhändigen Ergänzungen, aber: keine numerisch durch gerechnete Musterbeispiele, keine Zusatzblätter.

RESULTATE: Wo exakte Resultate verlangt sind, soll man die Resultate soweit wie möglich vereinfachen, nicht-aufgehende Wurzeln, die Zahlen π und e aber stehen lassen. Die Herleitung von Resultaten muss stets klar ersichtlich sein.

NOTENSKALA: Die sieben Aufgaben ergeben maximal 48 Punkte. Für die Note Sechs braucht man nicht alle Aufgaben zu lösen.

NAME: _____

PUNKTE: _____

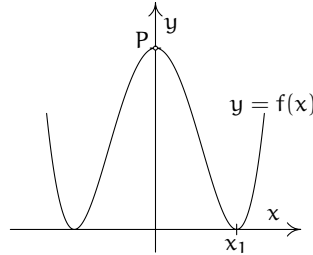
NOTE: _____

1. ANALYSIS: FUNKTIONSBESTIMMUNG; EXTREMALPROBLEM (8 P)

Bei geeignet gewählten Parametern a, b, c, d ist der Graph von

$$x \mapsto f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$$

symmetrisch zur y -Achse, geht durch den Punkt $P(0 \mid 25)$ und berührt bei $x_1 = \sqrt{5}$ die x -Achse, hat also qualitativ die folgende Gestalt:



- a. Bestimmen Sie die Parameter a, b, c, d , also die Funktionsgleichung $y = f(x)$. (4 P)

Wer Aufgabe 1a nicht gelöst hat, benutze im Folgenden die Funktion \tilde{f} mit $\tilde{f}(x) = x^4 - 6x^2 + 9$, deren Graph qualitativ demjenigen von f entspricht; die Stelle x_1 und der Punkt P müssen bei Bedarf selber bestimmt werden. (-1 P)

- b. Die x -Achse und der Funktionsgraph begrenzen ein Flächenstück. Diesem ist ein Rechteck einzubeschreiben, dessen eine Seite auf der x -Achse zu liegen kommt. Bestimmen Sie die exakten Koordinaten des Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt. (4 P)

2. ANALYSIS: GEBROCHEN-RATIONALE FUNKTION (7 P)

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3}$ hat die Ableitungen

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{6x \cdot (x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}.$$

- a. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f . (1 P)
- b. Falls vorhanden, bestimmen Sie vertikale, horizontale und/oder schiefe Asymptoten für den Funktionsgraphen. (3 P)
- c. Bestimmen Sie Hochpunkte (lokale Maxima) und Tiefpunkte (lokale Minima) des Funktionsgraphen. (3 P)

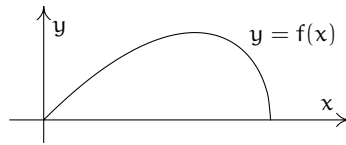
Hinweis:

Es ist keine »vollständige Kurvendiskussion« für $y = f(x)$ durchzuführen, speziell braucht man f nicht zu skizzieren. Die Antworten sind aber hinreichend zu begründen. Wertetabellen sind zum Beispiel wertlos.

3. ANALYSIS: FLÄCHEN- UND VOLUMENMESSUNG

(7 P)

- a. Der Graph von $f : x \mapsto 3x\sqrt{1-x}$ umschließt zusammen mit der x -Achse ein beschränktes Flächenstück:



Dieses rotiert um die x -Achse und erzeugt dabei einen Körper. Berechnen Sie dessen exaktes Volumen. (3 P)

- b. Berechnen Sie den exakten Flächeninhalt, der von den Graphen der zwei Funktionen $f : y = x^3 - x^2 + 1$ und $g : y = 2x + 1$ umschlossen wird. (4 P)

4. ANALYSIS: VERMISCHTES

(6 P)

- a. Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung, ohne diese algebraisch zu vereinfachen. (2 P)

i. $f(x) = x \cdot e^{\sin x}$ ii. $g(x) = \frac{1-2x}{x^2+1}$

- b. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto -1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$$

sämtliche Wendepunkte des Graphen. (2 P)

- c. Für welche kleinste positive Zahl a nimmt das Integral

$$J = \int_0^a \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

den Wert $J = 1$ an? (2 P)

5. VEKTORGEOMETRIE

(6 P)

Die Ebenen $F : x + y + 2z - 5 = 0$ und $G : x - y - z - 2 = 0$, sowie

die Gerade $h : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

- a. Gesucht ist eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen F und G . (3 P)
- b. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade h die Ebene F ? (3 P)

6. VEKTORGEOMETRIE: KREISE UND TANGENTEN

(7 P)

Gegeben sind die Mittelpunkte und Radien zweier Kreise:

$$k: M(7 | 4), \quad r = 10$$

$$\bar{k}: \bar{M}(-5 | -12), \quad \bar{r} = 5,$$

$$\text{sowie die Gerade } g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Untersuchen Sie algebraisch die Anzahl $(0; 1; 2)$ der Schnittpunkte von g und k . (2 P)
Hinweis: Allfällige Schnittpunkte sind nicht zu berechnen.
 - Bestimmen Sie die Gleichung der Senkrechten h zur Geraden g durch M . (1 P)
 - Zeigen Sie, dass $P(13 | 12)$ auf dem Kreis k liegt, und berechnen Sie die Gleichung der Kreistangente in P . (1 P)
 - In welche (Teil-) Verhältnisse teilen die Kreislinien k und \bar{k} die Zentrale $M\bar{M}$, und welche zwei Punkte \bar{L} auf \bar{k} bzw. L auf k kommen sich am nächsten? (3 P)
-

7. VEKTORGEOMETRIE

(7 P)

Gegeben sind die Punkte $A(2 | 7 | 8)$, $B(1 | 6 | 10)$, $C(-2 | 0 | 4)$.

- Die Punkte A , B und C liegen in der Ebene E . Stellen Sie die Gleichung von E auf. (2 P)
 - Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC exakt. (1 P)
 - Bestimmen Sie beim Vektor $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ z_0 \end{pmatrix}$ die Zahl z_0 so, dass \overrightarrow{CD} mit der Kante CB einen rechten Winkel bildet. Wie lauten die Koordinaten des Punktes D ? (2 P)
 - Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders $ABCD$ exakt. (2 P)
Hinweis:
Arbeiten Sie mit $D'(0 | 2 | 3)$, falls Sie D nicht berechnen konnten. (-1 P)
-

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.