

1. ANALYSIS: FUNKTIONSBESTIMMUNG; EXTREMALWERTPROBLEM

a) $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx + c$$

Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse: $c = 0$

Durch den Punkt P(0|25) $25 = d$

beide Werte einsetzen!

Berührungspunkt(Minimum) in $x_1 = \sqrt{5}$ $0 = 4a\sqrt{5}^3 + 2b\sqrt{5}$

der Graph geht durch $(\sqrt{5}|0)$ $0 = 25a + 5b + 25$

die erste Gleichung teilen wir durch $2\sqrt{5}$ $0 = 2a \cdot 5 + b = 10a + b$
 die zweite Gleichung teilen wir durch 5 $0 = 5a + b + 5$

Lösung des Systems: $x = 1, y = -10 \Rightarrow f(x) = x^4 - 10x^2 + 25$

1. b) Für die Fläche des Rechtecks gilt:

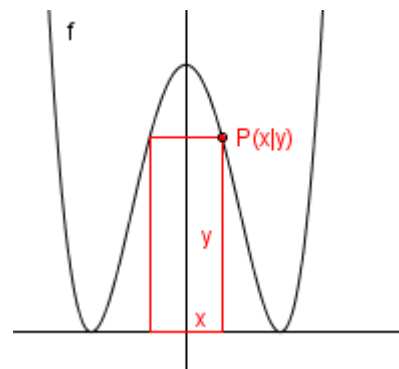
$$A = 2x \cdot y = 2x(x^4 - 10x^2 + 25) \\ = 2x^5 - 20x^3 + 50x$$

Die Fläche ist maximal, wenn:

$$A' = 10x^4 - 60x^2 + 50 = 0$$

Lösung der Gleichung:

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \\ (x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0 \\ (x + 1)(x - 1)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$



Brauchbar sind die Lösungen $x = 1$ und $x = -1$, die andern beiden liegen gerade in den Tiefpunkten der Kurve und die Fläche des Rechtecks wäre Null.

Gesuchte Punkte: $P(1|16), (-1|16), (1|0), (-1|0)$

Maximum, denn: $A'' = 40x^3 - 60x \Rightarrow A''(1) = 20 - 60 = 40 < 0$

2. ANALYSIS: GEBROCHEN- RATIONALE FUNKTION

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 - 3}$$
$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$$
$$f''(x) = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}$$

a) $ID = \mathbb{R} \setminus \{ \pm\sqrt{3} \}$

b) Pole bei $x = \pm\sqrt{3}$

$$(x^3 - x^2 + 3) : (x^2 - 3) = x - 1 + \frac{3x}{x^2 - 3}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad - 3x \\ -x^2 + 3x + 3 \\ \hline -x^2 \quad + 3 \\ \hline 3x \end{array}$$

Schiefe Asymptote: $y = x - 1$

c) $x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, x_3 = 3, x_4 = -3$

$x = 0$: $f''(0) = 0$ Sattelpunkt

$x = 3$: $f''(3) > 0$ Minimum in $(3|3.5)$

$x = -3$: $f''(-3) < 0$ Maximum in $(-3|-5.5)$

3. ANALYSIS: FLÄCHEN- UND VOLUMENBERECHNUNG

a) Nullstellen der Funktion bei $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$$y = 3x\sqrt{1-x}$$
$$y^2 = 9x^2(1-x) = 9x^2 - 9x^3$$

$$V = \pi \int_0^1 (9x^2 - 9x^3) dx = \pi \left[3x^3 - \frac{9}{4}x^4 \right]_0^1 = \pi \left(3 - \frac{9}{4} \right) - 0 = \frac{3\pi}{4}$$

b) Schnittpunkte von f und g:

$$x^3 - x^2 + 1 = 2x + 1$$
$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^3 - x - 2) = 0$$
$$x(x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

Differenz der Funktionen f und g: $x^3 - x^2 + 1 - (2x + 1) = x^3 - x^2 - 2x$

Stammfunktion davon: $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 = \frac{x^2}{12} \cdot (3x^2 - 4x - 12)$

Es sind zwei Flächenstücke zu berechnen:

$$A_1 = \left[\frac{x^2}{12} \cdot (3x^2 - 4x - 12) \right]_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{12} \cdot (3 + 4 - 12) = \frac{5}{12}$$

$$-A_2 = \left[\frac{x^2}{12} \cdot (3x^2 - 4x - 12) \right]_0^2 = \frac{4}{12} \cdot (12 - 8 - 12) = -\frac{8}{3}$$

Die gesuchte Flächeninhalt ist: $A = A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$

4. ANALYSIS: VERMISCHTES

a) $f(x) = x \cdot e^{\sin x}$ $f'(x) = 1 \cdot e^{\sin x} + x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$

$$g(x) = \frac{1-2x}{x^2+1} \qquad g'(x) = \frac{-2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (1-2x)}{(x^2+1)^2}$$

b) $y = -1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$
 $y' = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$
 $y'' = -\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$

Wendepunkte: $-\frac{\pi^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 0$

$$\frac{\pi}{2} \cdot x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \Big| \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$x = 1 + 2k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

c) $\mathfrak{I} = \int_0^a \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^a = 2 \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right) - 0$

$$2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) = 1$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 30^\circ$$

$$a = 60^\circ \quad \text{oder} \quad a = \frac{\pi}{3}$$

5. VEKTORGEOMETRIE

$$\begin{array}{l} \text{a) } \quad \text{F:} \quad x + y + 2z - 5 = 0 \\ \quad \quad \text{G:} \quad \frac{x - y - z - 2 = 0}{2x \quad + \quad z - 7 = 0} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow y = x - z - 2 \\ \Rightarrow z = 7 - 2x \end{array}$$

Wir suchen zwei Punkte der Schnittgeraden:

$$\begin{array}{l} \text{z. B.} \quad x = 0, z = 7, y = -9 \Rightarrow S_1 (0|-9|7) \\ \quad \quad x = 2, z = 3, y = -3 \Rightarrow S_2 (2|-3|3) \end{array}$$

$$\text{Eine Gleichung der Schnittgeraden: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: der Richtungsvektor kann auch aus dem Produkt der beiden Normalenvektoren gewonnen werden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2 = \sqrt{6} \cdot 3 \cdot \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 15.8^\circ$$

6. VEKTORGEOMETRIE: KREISE UND TANGENTEN

a) Für Schnittpunkte $(x|y)$ gilt:

$$\begin{aligned}(x-7)^2 + (y-4)^2 &= 100 \\ x &= 3 + 3t \\ y &= 6 + t\end{aligned}$$

Varianten:

- Zeigen, dass $(3/6)$ näher als 10 bei M
- Zeigen, dass der Abstand $Mg < 10$

wir setzen die unteren beiden Gleichungen in der ersten ein:

$$\begin{aligned}(3t-4)^2 + (t+2)^2 &= 100 \\ 10t^2 - 20t - 80 &= 0 \\ t^2 - 2t - 8 &= 0\end{aligned}$$

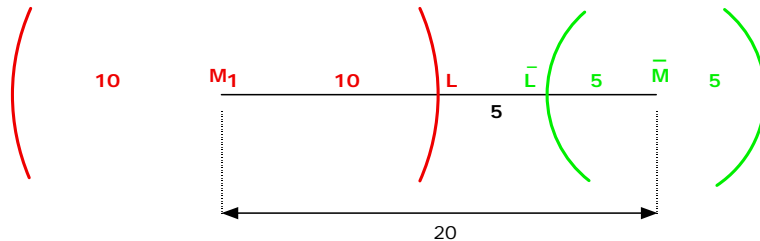
Die Gleichung hat zwei Lösungen, es gibt zwei Schnittpunkte.

b) $3x + y = 3 \cdot 7 + 4 = 25$

c) $(13-7)^2 + (12-4)^2 = 36 + 64 = 100$

$$\overline{PM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y = 39 + 48 = 87 \quad \text{als Tangentengleichung}$$

d) $\overline{MM} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad |\overline{MM}| = 20$



Es ist: $M_1L : L\bar{L} : \bar{L}\bar{M} = 10 : 5 : 5 = 2 : 1 : 1$

$$\overline{M\bar{L}} = \frac{1}{4} \overline{MM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{L}(-9|-8)$$

$$\overline{M\bar{L}} = \frac{1}{2} \overline{MM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L(-6|-4)$$

7. VEKTORGEOMETRIE

$$a) \quad \overline{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Ebene E: $6x - 4y + z = -8$

$$b) \quad \text{Fläche des Dreiecks ABC: } \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 12^2 + 3^2} = \frac{3}{2} \sqrt{53}$$

Es muss gelten:

$$c) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 12 + 6z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = -3 \Rightarrow D(0|2|1)$$

$$d) \quad V = \frac{1}{6} (\overline{CA} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{CD}) = \frac{1}{6} (\overline{CA} \times \overline{CB}) \cdot \overline{CD} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{36 - 24 - 9}{6} = \frac{1}{2}$$

Variante: die Höhe des Tetraeders ist gleich dem Abstand des Punktes D von der Ebene E:

$$\frac{6 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 1 + 8}{\sqrt{36 + 16 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{53}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{53}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{53}} = \frac{1}{2}$$