

$$y = \sin^2 x \quad \text{zweimal ableiten!}$$

Für die 1. Ableitung brauchen wir die Kettenregel:

$$\begin{aligned} y &= u^2 & \text{mit} & & u &= \sin x \\ \frac{dy}{du} &= 2u & & & \frac{du}{dx} &= \cos x \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich: $y' = \frac{dy}{dx} = 2u \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x$

Die zweite Ableitung wird sehr einfach, wenn wir merken, dass:

$$y = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

Wir benützen wieder die Kettenregel:

$$\begin{aligned} y &= \sin u & \text{mit} & & u &= 2x \\ \frac{dy}{du} &= \cos u & & & \frac{du}{dx} &= 2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$y'' = \cos u \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

Wenn wir die Vereinfachung nicht erkennen, benötigen wir für die 2. Ableitung die Produktregel:

$$\begin{aligned} y'' &= (2 \cdot f \cdot g)' & f &= \sin x & g &= \cos x \\ &= 2(f' \cdot g + g' \cdot f) & f' &= \cos x & g' &= -\sin x \\ &= 2(\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x) \\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

Es ist übrigens: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$