

Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung.
Die Tangente im Kurvenpunkt P(3|9) geht auch durch den Ursprung.

Vorgängige Überlegungen.

"Berührt im Ursprung" heisst: $O(0|0)$ ist ein Punkt der Kurve mit der Steigung $m = 0$

Eine Gerade, die durch $P(3|9)$ und den Ursprung geht hat die Steigung: $m = \frac{9}{3} = 3$

Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Gleichungssysteme

$O(0 0)$	ergibt :	$f(0) = 0$	$0 =$	d	(1)
$m = 0$		$f'(0) = 0$	$0 =$	c	(2)
$P(3 9)$		$f(3) = 9$	$9 = 27a + 9b + 3c + d$		(3)
$m = 3$ in P		$f'(3) = 3$	$3 = 27a + 6b + c$		(4)

Auflösung ganz oder teilweise mit dem Taschenrechner.

Es lohnt sich, mindestens (1) und (2) einzusetzen:

$$\begin{cases} 9 = 27a + 9b & (5) \\ 3 = 27a + 6b & (6) \end{cases}$$

Subtraktion ergibt: $6 = 3b$

Damit hat man die Lösungen:

$$\mathbf{a = -\frac{1}{3}}$$
$$\mathbf{b = 2}$$
$$\mathbf{c = 0}$$
$$\mathbf{d = 0}$$

und die Gleichung:

$$\mathbf{f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2}$$