

Die kubische Parabel $p: y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat den Wendepunkt $W(3|0)$ und ein relatives Extremum in $P(1|8)$. Bestimmen Sie die Gleichung von p .

[Matur TSME 02, Aufgabe 5]

Wir benötigen die 1. und die 2. Ableitung (Extremum und Wendepunkt):

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$$\text{Wendepunkt bei } x = 3 \quad y'' = 0 = 6a \cdot 3 + 2b = 18a + b \quad (1)$$

$$p \text{ geht durch } W(3|0) \quad y = 0 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 27a + 9b + 3c + d \quad (2)$$

$$\text{Extremum für } x = 1 \quad y' = 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 3a + 2b + c \quad (3)$$

$$p \text{ geht durch } P(1|8) \quad y = 8 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d \quad (4)$$

Das sind vier Gleichungen für die vier Unbekannten a, b, c, d .

Wir subtrahieren (4) von (2) und erhalten ein System von Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$-8 = 26a + 8b + 2c$$

↓

$$\left| \begin{array}{l} -4 = 13a + 4b + c \\ 0 = 3a + 2b + c \\ 0 = 18a + 2b \end{array} \right| \begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array}$$

Wir subtrahieren (6) von (5) und erhalten:

$$\left| \begin{array}{l} -4 = 10a + 2b \\ 0 = 18a + 2b \end{array} \right|$$

$$-4 = -8a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(7) \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$$

$$(6) \Rightarrow c = \frac{15}{2}$$

$$(4) \Rightarrow d = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{1}{2}(x^3 - 9x^2 + 15x + 9)}$$