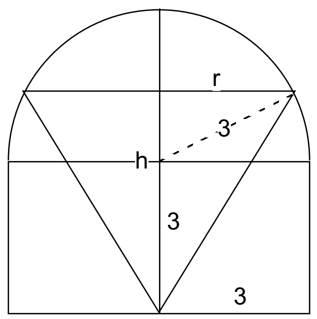
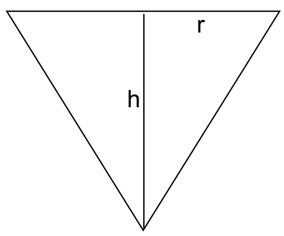
Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiszylinder mit aufgesetzter Halbkugel.
Zylinderradius und –höhe und Radius der Halbkugel haben je die Länge 3.
Diesem Körper wird ein gerader Kreiskegel einbeschrieben mit der Spitze im Mittelpunkt der Zylinderstandfläche und dem Grundkreis auf der Kugeloberfläche.

a) Bestimmen Sie die Höhe des Kreiskegels mit maximalem Volumen.
b) Bestimmen Sie die Höhe des Kreiskegels mit maximaler Mantelfläche.

Der Kegel habe die Höhe h und den Grundkreisradius r.



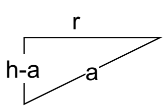


Aufgabe a): maximales Volumen

Die Hauptfunktion berechnet das Volumen des Kegels, das extremal werden soll: $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

Das ist hier eine Funktion von zwei Variablen, nämlich r und h. Wir benötigen eine Nebenbedingung, um die eine der beiden Variablen wegzuschaffen:

Wir entnehmen der Figur das folgende Dreieck und erhalten:



$$r^2 + (h-3)^2 = 9$$

Diese Gleichung lässt sich sehr viel einfacher nach r^2 als nach h auflösen:

$$\begin{aligned} r^2 &= 9 - \left(h^2 - 6h + 9\right) \\ &= 6h - h^2 \end{aligned}$$

Tipp: Es lohnt sich, wenn man genau überlegt, welche Variable einfacher zu eliminieren ist!
(für h gälte: $h = \sqrt{9 - r^2} + 3$)

Wir setzen r^2 in der Hauptfunktion ein und erhalten: $V = \frac{\pi}{3}\left(6h - h^2\right)\cdot h = \frac{\pi}{3}\left(6h^2 - h^3\right)$

Von dieser Funktion ist das Maximum zu bestimmen; wir leiten nach h ab und setzen das Ergebnis $=0$.

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(12h - 3h^2\right) = \frac{\pi}{3}\cdot h\cdot\left(12 - 3h\right) = 0$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen: $h = 0$ mit $V = 0$ (Minimum)

$h = 4$, $r = 2\sqrt{2}$ und $V = \frac{32\pi}{3}$

AUFGABE b): MAXIMALE MANTELFLÄCHE

Die Hauptfunktion berechnet die Mantelfläche des Kegels, die extremal werden soll:

$$M = \pi r s \quad \text{wobei} \quad s^2 = r^2 + h^2$$

Bei dieser Funktion lässt sich die Wurzel beim eliminieren nicht vermeiden.

TIPP: Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 extremal ist, dann ist auch f^2 an dieser Stelle extremal.

Wir wählen also als Hauptfunktion: $M^2 = \pi^2 r^2 s^2$

Wir benötigen zwei Nebenbedingungen:

$r^2 = 6h - h^2$ (s. 1. Seite)

$s^2 = h^2 + r^2 = h^2 + 6h - h^2 = 6h$

Wir setzen beides in der Hauptfunktion ein und erhalten:

$$M^2 = \pi^2\cdot\left(6h - h^2\right)\cdot 6h = 6\pi^2\cdot\left(6h^2 - h^3\right)$$

wir leiten nach h ab und setzen das Ergebnis $=0$.

$$\left(M^2\right)' = 6\pi^2\cdot\left(12h - 3h^2\right) = 6\pi^2\cdot h\cdot\left(12 - 3h\right) = 0$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen: $h = 0$ mit $M = 0$ (Minimum)

$\mathbf{h = 4}$