[Kantonsschule Rychenberg Winterthur, Typus C, 1989]; Kurzaufgabe:
Bestimme die Gleichung einer zum Ursprung symmetrischen Parabel möglichst niedrigen Grades, welche bei $x = 2$ eine doppelte Nullstelle hat und im ersten Quadranten mit der Tangente im Ursprung eine Fläche mit dem Inhalt 2 einschliesst.

ANSATZ FÜR DIE FUNKTIONSGLEICHUNG

Eine zum Nullpunkt symmetrische Parabel muss durch den Nullpunkt gehen. Wenn sie eine doppelte Nullstelle bei x=2 hat, dann hat sie eine ebensolche bei x=-2.
Das liefert uns folgenden Ansatz für die Gleichung:

$$f(x) = ax(x-2)^2(x+2)^2$$

$x(x-2)^2(x+2)^2 = 0$ ist die einfachste mögliche Gleichung, mit den verlangten Lösungen.
Der Faktor a bestimmt die Dehnung in vertikaler Richtung und ist notwendig, damit auch die Bedingung für die Fläche erfüllt werden kann.

TANGENTENGLEICHUNG

$$\begin{aligned} f(x) &= ax(x-2)^2(x+2)^2 = ax(x+2)(x-2)(x+2)(x-2) = ax(x^2-4)^2 \\ &= ax(x^4-8x^2+16) = a(x^5-8x^3+16x) \\ f'(x) &= a(5x^4-24x^2+16) \end{aligned}$$

Für die Steigung der Tangente im Nullpunkt gilt: $f'(0) = 16a$

Damit ist die Gleichung der Tangente: $y = 16ax$

SCHNITT MIT DER KURVE

$$\begin{aligned} a(x^5-8x^3+16x) &= 16ax \\ x^5-8x^3+16x &= 16x \\ x^5-8x^3 &= 0 \\ x^3(x^2-8) &= 0 \end{aligned}$$

Die benötigte Schnittstelle ist bei $x = \sqrt{8}$

FLÄCHE

$$a\int_0^{\sqrt{8}}\left(16x-(x^5-8x^3+16x)\right)dx = a\int_0^{\sqrt{8}}(-x^5+8x^3)\,dx = a\left[-\frac{x^6}{6}+2x^4\right]_0^{\sqrt{8}}$$

$$= a\left(-\frac{8^3}{6}+2\cdot 8^2\right)-0=\frac{128\,a}{3}$$

$$\boxed{\sqrt{8}^{\,2}=8\quad !}$$

Da diese Fläche den Inhalt 2 haben soll, ergibt sich die Gleichung: $\frac{128\,a}{3}=2$

mit der Lösung $a=\frac{3}{64}$

FUNKTIONSGLEICHUNG: $f(x)=\frac{3x}{64}(x-2)^2(x+2)^2$

GRAPH