[Eidg. Matur Bern, Frühling 76]

Der Graph k einer Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Ursprung O des Koordinatensystems, hat in $P(1|\frac{4}{3})$ eine waagrechte Tangente und besitzt an der Stelle $x=2$ einen Wendepunkt.

a) Bestimmen Sie a, b, c und d.

b) Zeichnen Sie den Graph k unter Verwendung der aus der Kurvendiskussion sich ergebenden besonderen Werte.

c) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Flächenstücke, welche durch die Kurve und durch die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x$ begrenzt sind.

---

a) Wir benötigen beide Ableitungen, weil ein Wendepunkt vorkommt:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$f(0) = 0$	$0 = d$
$f(1) = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} = a + b + c + d$
$f'(1) = 0$	$0 = 3a + 2b + c$
$f''(2) = 0$	$0 = 12a + 2b$

Wenn wir $d=0$ einsetzen und die dritte Gleichung von der zweiten subtrahieren, ergibt sich das System:

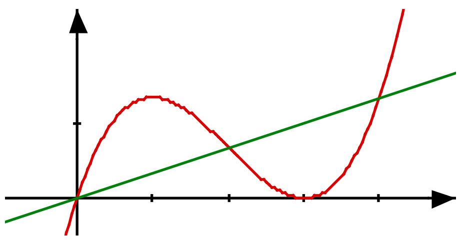
$$\left| \begin{array}{l} \frac{4}{3} = -2a - b \\ 0 = \quad 6a + b \end{array} \right| \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}, \quad b = -2, \quad c = 3$$

und die Funktion heisst: $\mathbf{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x}$

b) Kurvendiskussion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x = \frac{1}{3}x(x^2 - 6x + 9) = \frac{1}{3}x(x-3)^2$$
$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

	x	y	y'
Wendepunkt	2	$\frac{2}{3}$	-1
Maximum	1	$\frac{4}{3}$	
Minimum	3	0	



c) Die beiden Flächenstücke sind symmetrisch (die Gerade geht durch den Wendepunkt) und deshalb gleich gross.

Schnittpunkte: 0 und 2 sind schon bekannt.

Fläche:

$$A = 2\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{8x}{3} \right) dx = 2\left[\frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} \right]_0^2 = 2\left(\frac{4}{3} - \frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right) = \frac{8}{3}$$