[TSME, Matur 2000]

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x - x^3$.

a) Zeichnen Sie ein Bild des Graphen von f(x) (Nullstellen samt Steigung, Extrema)

b) In welchen Punkten des Graphen von f(x) verlaufen die Tangenten parallel zur Geraden mit der Gleichung $13x - 4y + 20 = 0$?

c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches die Kurve von f(x) zusammen mit der x-Achse im 1. Quadranten einschliesst.

d) Eine Gerade durch den Ursprung (0|0) soll nun dieses Flächenstück halbieren. Bestimmen Sie die Steigung dieser Geraden.

---

a) $f(x) = 4x - x^3 = x(4 - x^2)$

$f'(x) = 4 - 3x^2$

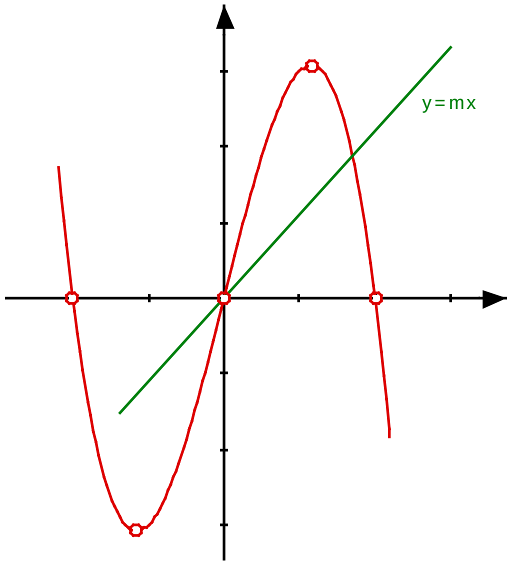
$f''(x) = -6x$

Nullstellen: $x = 0$ mit $f'(4) = 4$

$x = \pm 2$ mit $f'(\pm 2) = -8$

Extrema: $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad y = \pm\frac{16}{3\sqrt{3}}$

Wendepunkt: $W(0|0)$



b) $13x - 4y + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{13}{4}x + 5$

$f'(x) = 4 - 3x^2 = \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$ $\qquad \left(\pm\frac{1}{2} \,\middle|\, \pm\frac{15}{8}\right)$

c) $A = \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8 - 4 = 4$

d) Ansatz für die Gerade: $y = mx$

Schnittpunkt von Gerade und f(x):

$$4x - x^3 = mx$$
$$0 = x^3 - 4x + mx$$
$$0 = x(x^2 - 4 + m) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\; x_2 = \sqrt{4-m}$$

Wir berechnen das Flächenstück zwischen f(x) und der Geraden, dessen Inhalt 2 sein muss: als Abkürzung setzen wir: $\sqrt{4-m} = u$

$$2 = \int_0^u (4x - x^3 - mx)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2}\right]_0^u$$

$$2 = 2u^2 - \frac{u^4}{4} - \frac{mu^2}{2}$$
$$8 = 8u^2 - u^4 - 2mu^2$$
$$8 = u^2(8 - u^2 + 2m)$$
$$8 = (4-m)(8 - 4 + m - 2m)$$
$$8 = (4-m)(4-m)$$
$$8 = 16 - 8m + m^2$$
$$0 = 8 - 8m + m^2$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $m = 4 \pm 2\sqrt{2}$,

Einzige Lösung: $\mathbf{m = 4 - 2\sqrt{2}}$, die andere lässt sich nicht in $\sqrt{4-m}$ einsetzen.