

[Eidg. Matur Basel, Herbst 76]

Zwei verschiedene Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ haben dieselbe 2. Ableitung $f_1''(x) = f_2''(x) = \frac{3x}{16} - 1$.

Ihre Graphen gehen beide durch den Ursprung des Koordinatensystems und berühren beide die x-Achse.

- Wie lauten die Funktionen f_1 und f_2 ?
 - Stellen Sie die beiden Funktionen im gleichen Koordinatensystem mit Hilfe der Extrem- und Wendepunkte dar (Einheit: 1 Häuschen).
 - Welchen Inhalt hat das von den beiden Graphen und von der Geraden mit der Gleichung $x=8$ eingeschlossene Flächenstück?
-

- a) Bestimmung der beiden Funktionen:

$$f''(x) = \frac{3x}{16} - 1$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{32} - x + a$$

$$f(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + ax + b$$

Bei Integrale, die nicht für die Flächenberechnung verwendet werden, darf man auf die Konstanten (a und b) keineswegs verzichten.

Graph geht durch den Ursprung: $b = 0$

Eine Funktion, deren Graph die x-Achse berührt, muss an dieser Stelle eine doppelte Nullstelle haben!

$$\frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + ax = 0$$

$$x^3 - 16x^2 + 32ax = 0$$

$$x(x^2 - 16x + 32a) = 0$$

1. Variante: Doppellösung für $x = 0$; dann ist $a = 0$ und $f_1(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2}$

2. Variante: Der Klammerausdruck liefert die Doppellösung;
 $x^2 - 16x + 32a = (x - 8)^2$ für $32a = 64$ und $a = 2$.

$$f_2(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

b) Kurvendiskussion

$$f_1(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x-16)}{32}$$

$$f_1' = \frac{x(3x-32)}{32}$$

$$f_1'' = \frac{6x-32}{32}$$

Maximum: $(0|0)$

Minimum: $(\frac{32}{3} | -\frac{512}{27})$

Wendepunkt: $(\frac{16}{3} | -\frac{256}{27})$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x(x-8)^2}{32}$$

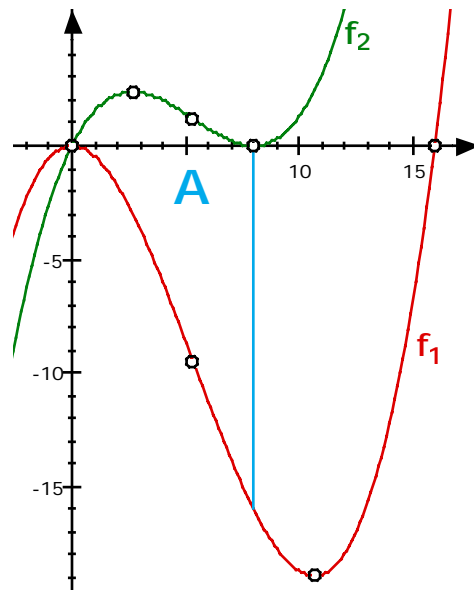
$$f_2' = \frac{3x^2 - 32x + 64}{32}$$

$$f_2'' = \frac{6x-32}{32}$$

Minimum: $(8|0)$

Maximum: $(\frac{8}{3} | \frac{64}{27})$

Wendepunkt: $(\frac{16}{3} | \frac{32}{27})$



c) Flächenberechnung:

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} + 2x - \left(\frac{x^3}{32} - \frac{x^2}{2} \right) = 2x$$

$$A = \int_0^8 2x \, dx = [x^2]_0^8 = 64$$