

[Kanti Frauenfeld 78, Wb]

Welche ganze rationale Funktion erfüllt die drei folgenden Bedingungen?

- a) $f(x) = [f'(x)]^2$
b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{19}{12}$
c) $f'(0) < 0$
-

a) Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn die Funktion quadratisch ist.

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

dann ist: $f'(x) = 2ax + b$ und $f'(x)^2 = (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$

Die Gegenüberstellung $ax^2 + bx + c = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$ ergibt:

$$a = 4a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4} \quad (a = 0 \text{ ist unbrauchbar})$$

$$b = 4ab \quad \text{stimmt sicher, wenn } a = \frac{1}{4}$$

$$c = b^2$$

Die Funktion lässt sich schreiben als: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2$

b) $\int_0^1 (\frac{1}{4}x^2 + bx + b^2) dx = [\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + b^2x]_0^1$

$$\frac{1}{12} + \frac{b}{2} + b^2 = \frac{19}{20}$$

$$2b^2 + b - 3 = 0$$

Lösungen: $b_1 = 1$

$$b_2 = -1.5$$

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1.5x + 2.25$$

c) Wir leiten beide Funktionen ab und prüfen ihren Wert an der Stelle $x = 0$

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1.5x + 2.25$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{2}x - 1.5$$

$$f_1'(0) = 1$$

$$f_2'(0) = -1.5$$

Damit bleibt: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1.5x + 2.25$