

Diskutieren und skizzieren Sie die Funktion $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$.

(Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Krümmungsverhalten)

[Matur TSME 02, Aufgabe 4]

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 - 3x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$y' = 3x^{-2} - 4x^{-3} = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$y'' = -6x^{-3} + 12x^{-4} = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = \frac{12 - 6x}{x^4}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen: $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$

Extrema: $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ und $y = -\frac{1}{8}$
für $x < \frac{4}{3}$ ist y' negativ, für $x > \frac{4}{3}$ ist y' positiv: relatives Minimum

Wendepunkt: $12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow W(2|0)$
Bis zum Wendepunkt weist die Kurve eine Linkskrümmung auf: $y'' < 0$
dann ergibt sich eine Rechtskrümmung.

Gerader Pol für $x=0$

Wagrechte Asymptote: $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty \Rightarrow y = 1$

