

Der Graph der Funktion $y = \frac{x^3 - 5x + a}{4x^3}$ hat bei $x=3$ eine Nullstelle.

Bestimmen Sie a und zeigen Sie, dass es keine weiteren Nullstellen hat.

Einfacher formuliert: der Zähler ist für $x=3$ Null.

$$3^3 - 5 \cdot 3 + a = 0 \Rightarrow a = -12$$

Mittels Polynomdivision lässt sich die kubische Gleichung in zwei Faktoren zerlegen.

$$x^3 - 5x - 12 = (x - 3)(x^2 + 3x + 4)$$

Die Gleichung $x^2 + 3x + 4 = 0$ hat keine reellen Lösungen.

Ihre Diskriminante (der Ausdruck unter der Wurzel in der Lösungsformel) ist negativ:

$$b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7$$