

Gegeben sei eine Funktion f durch $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$.

- a) Diskutieren Sie f für die Parameterwerte $a=4$ und $b=4$ vollständig und zeichnen Sie einen schönen Graphen (1 ~ 8 Hüsli).
 - b) Wie gross ist die gesamte Fläche unter der Kurve von a) von $-\infty$ bis $+\infty$?
 - c) Wie müssen a und b gewählt werden, damit f ein Maximum mit dem y -Wert 2 und einen Wendepunkt mit der x -Koordinate 1 erhält?
[TSME, Matur BDE, 1996]
-

Aufgabe a)

Überall definiert: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, kein Pol.

Die x -Achse ($y = 0$) ist Asymptote (Grad des Nenners grösser als Grad des Zählers).

$$y = \frac{4}{x^2 + 4} = 0$$

Keine Nullstellen

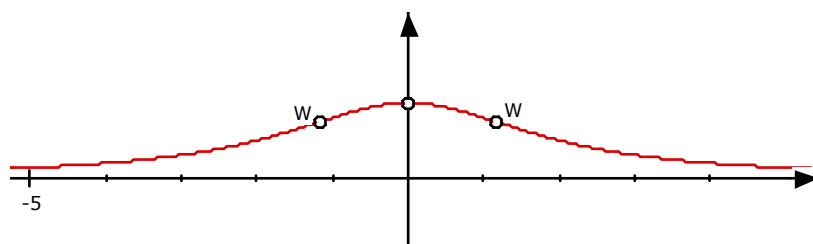
$$y' = \frac{-8x}{(x^2 + 4)^2} = 0$$

Hochpunkt in $(0 | 1)$

$$y'' = \frac{4(6x^2 - 8)}{(x^2 + 4)^3} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}$$

Wendepunkte in $(\pm \frac{2}{\sqrt{3}} | \frac{3}{4})$

Die Kurve ist symmetrisch zur y -Achse.



Aufgabe b)

Wir berechnen vorderhand nur die rechte Hälfte zwischen 0 und a.

$$\frac{F(a)}{2} = \int_0^a \frac{4}{x^2 + 4} dx = 4 \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_0^a = 2 (\arctan \frac{x}{2} - \arctan 0) = 2 \arctan \frac{x}{2}$$

Zum Integral: $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$ findet man in der Formelsammlung für $a^2 = 4$

$\arctan x$ ist dasselbe wie $\tan^{-1} x$

Nun verschieben wir die Grenze a ins Unendliche:

$$\frac{F}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \arctan \frac{x}{2}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad F = 2\pi$$

Aufgabe c)

Die allgemeinen Ableitungen sind:

$$f'(x) = \frac{-2ax}{(x^2 + b)^2} \quad \text{das Maximum ist bei } x = 0 \quad f(0) = \frac{a}{b} = 2 \quad (1)$$

$$f''(x) = \frac{6ax^2 - 2ab}{(x^2 + b)^3} \quad f''(1) = \frac{6a - 2ab}{(1 + b)^3} = 0 \quad (2)$$

Das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{l} a = 2b \\ 6a - 2ab = 0 \end{array} \right|$ ist einfach zu lösen:

$$12b - 4b^2 = 0$$

$$4b(3 - b) = 0$$

$$b = 3, \quad a = 6, \quad f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$$

(Die Lösungen $b = 0$ und $a = 0$ sind nicht brauchbar.)