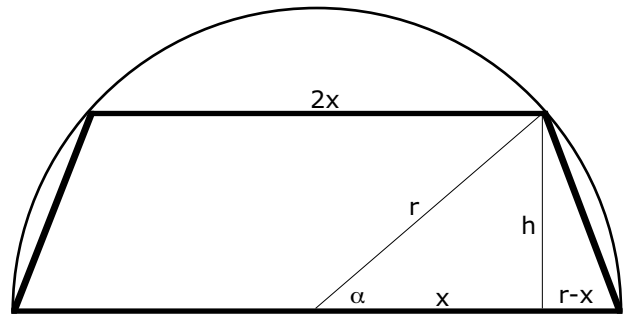


Einem Halbkreis mit Radius r wird ein gleichschenkliges Trapez so einbeschrieben, dass die grössere Parallelseite mit dem Durchmesser zusammenfällt.

- Zeigen Sie, dass die übrigen drei Seiten gleich lang sind, wenn die Trapezfläche maximal ist.
- Wie lang sind die übrigen drei Seiten, wenn der Umfang des Trapezes maximal sein soll?
[TSME, Matur BDE, 1996]

Trapezfläche:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{2r+2x}{2} \cdot h = (r+x) \cdot h$$



Mit Hilfe der trigonometrischen Formeln lassen sich x und h aus α berechnen:

$$\sin \alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

Die Länge der beiden Schenkel ist dann:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{h^2 + (r-x)^2} = \sqrt{(r^2 - x^2) + (r-x)^2} = \sqrt{2r^2 - 2rx} \\ &= \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos \alpha} = r\sqrt{2 - 2\cos \alpha} \end{aligned}$$

a) Damit erhalten wir für die Fläche A:

$$A = (r + r \cos \alpha) \cdot r \sin \alpha = r^2 \sin \alpha + r^2 \sin \alpha \cos \alpha = r^2 (\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)$$

Ableiten und Null setzen:

$$\begin{aligned} A' &= r^2 \cdot (\cos \alpha + \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha (-\sin \alpha)) \\ &= r^2 \cdot (\cos \alpha + \cos^2 \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= 0 \\ \cos \alpha + \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) &= 0 \\ 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 &= 0 \\ (2 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1) &= 0\end{aligned}$$

Es gibt nur eine brauchbare Lösung: $\cos \alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$$x = r \cos 60^\circ = \frac{r}{2}, \quad c = 2x = r, \quad h = r \sin 60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{2}, \quad s = \sqrt{h^2 + (r-x)^2} = r$$

b) Für den Umfang gilt:

$$u = 2r + 2x + 2s = 2r(1 + \cos \alpha + \sqrt{2 - 2 \cos \alpha})$$

Ableiten und 0 setzen: $u' = 2r \cdot \left(-\sin \alpha + \frac{2 \sin \alpha}{2\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}} \right) = 0$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}} = \sin \alpha \mid \sin \alpha \neq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \alpha}} = 1$$

$$\sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = 1$$

$$2 - 2 \cos \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = 0.5$$