

Berechnen Sie die Koordinaten aller Extremal- und Wendepunkte der Funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$
(exakt!)
[Matur TSME 2000, Kurzaufgabe, Flü]

Ableitungen:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \left(-\frac{2x}{4}\right) = -\frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} + \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

Extrema:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} &= 0 \\ x &= 0 \quad \mathbf{M(0 \mid 1)} \end{aligned}$$

$f''(0) < 0$, also handelt es sich um ein Maximum.

Wendepunkte:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} &= 0 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \quad \mathbf{W_{1,2}\left(\pm\sqrt{2} \mid \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \end{aligned}$$