

THURGAUISCH-SCHAFFHAUSERISCHE
MATURITÄTSSCHULE FÜR ERWACHSENE

MATURITÄTSPRÜFUNG 2008

MATHEMATIK: 4 STUNDEN

ALLGEMEINES: Bei jeder Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Die Lösungen sind am Schluss der Prüfung im Bogen der Aufgabenstellung abzugeben.

HILFSMITTEL: Taschenrechner ohne CAS-System, weder grafikfähig noch programmierbar.
Formelsammlung DMK mit eigenhändigen Ergänzungen, aber: keine numerische Beispiele, keine Zusatzblätter.

RESULTATE: Soweit wie möglich exakt angeben (π oder e oder nicht-aufgehende Wurzeln stehen lassen) oder auf 3 wesentliche Ziffern runden. Die Herleitung der Resultate ist ersichtlich, die Benutzung des Taschenrechners dokumentiert.

PUNKTE: Jede Teilaufgabe wird unabhängig vom Schwierigkeitsgrad mit 2 Punkten bewertet. Es sind somit 40 Punkte möglich, für die Maximalnote sind aber nicht alle nötig.

NAME: _____

PUNKTE: _____

NOTE: _____

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

1. ANALYSIS [6 P]

Gegeben ist die kubische Parabel

$$f: y = x^3 - 6x^2 + 8x + 1.$$

- a. Die Gerade $g: y = k \cdot x + 1$ berührt die Parabel an der Stelle $x = x_0 > 0$. Bestimmen Sie den Parameter k .
- b. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der Geraden $h: y = 5x - 9$ und der Parabel umschlossen wird.

2. ANALYSIS [8 P]

Unabhängige Teilaufgaben.

- a. Berechnen Sie exakt mittels einer geeigneten Substitution

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx.$$

- b. An welchen Stellen hat der Graph der Funktion

$$f: x \mapsto (4x^2 + 8x + 7) \cdot e^{-x}$$

horizontale Tangenten? Handelt es sich um lokale Maxima, lokale Minima oder Sattelpunkte? (Begründung!)

- c. In welchem Punkt des Graphen von

$$f: x \mapsto y = \ln x$$

hat die Tangente t die Steigung $m = \frac{1}{2}$. Wo und unter welchem Winkel schneidet t die y -Achse?

- d. Berechnen Sie das exakte Volumen des Körpers, der entsteht bei Rotation um die x -Achse der Kurve

$$y = e^{x/2} \quad (0 \leq x \leq \ln 2).$$

3. ANALYSIS [4 P]

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 6x^2}.$$

- a. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$.
- b. Bestimmen Sie die Definitionslücken und das genaue Verhalten von f in deren Nähe.

4. VEKTORGEOMETRIE

[6 P]

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- Wo und unter welchem Winkel schneidet g die yz -Ebene?
- Welcher Punkt P auf g liegt am nächsten beim Ursprung $\mathcal{O}(0 | 0 | 0)$?
- Eine Gerade h schneidet die Gerade g , liegt parallel zur Ebene $E : x - y + z + 4 = 0$ und geht durch den Punkt $Q(-1 | 3 | 2)$. Bestimmen Sie h .

5. VEKTORGEOMETRIE

[6 P]

Gegeben sind die Kugel mit Mittelpunkt $M(3 | -5 | 6)$ und Radius $r = 9$ sowie die Ebene $E : 8x + 4y - z - 24 = 0$.

- Die Ebene E bildet mit den Koordinatenebenen eine Pyramide. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.
- Die Kugel schneidet die xy -Ebene in einem Kreis. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.
- Bestimmen Sie die Tangentialebenen τ_1 und τ_2 an die Kugel, welche parallel sind zur Ebene E . In welchen Punkten berühren Sie die Kugel?

6. STOCHASTIK

[10 P]

Unabhängige Teilaufgaben.

- Eine Münze soll beim Werfen Kopf zeigen mit einer Wahrscheinlichkeit p von höchstens 75 %. Sie dürfen die Münze 90 mal werfen. Wann werden Sie auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die obige (Null-) Hypothese verwerfen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben sich beim Wurf von 10 Laplace-Würfeln mindestens 2 Dreier?
- Eine Urne enthalte 10 rote, 5 schwarze und 5 weiße Kugeln. Man zieht gleichzeitig zwei Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei rote Kugeln sind, wenn man weiß, dass mindestens eine Kugel rot ist.
- Wie viele 6-stellige Autonummern kann man mit den Ziffern $0, 1, \dots, 8, 9$ und den 26 Buchstaben des Alphabets bilden, welche genau 2 Buchstaben enthalten und nicht mit Null beginnen? Zum Beispiel 19B4B4 oder FX0036.
- Zu Ostern sind 8 grüne, 6 rote und ein blaues Ei versteckt worden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 3 gefundenen Eiern genau 2 von gleicher Farbe?

