

THURGAUISCH-SCHAFFHAUSERISCHE  
MATURITÄTSSCHULE FÜR ERWACHSENE

MATURITÄTSPRÜFUNG 2008

MATHEMATIK: 4 STUNDEN

**ALLGEMEINES:** Bei jeder Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Die Lösungen sind am Schluss der Prüfung im Bogen der Aufgabenstellung abzugeben.

**HILFSMITTEL:** Taschenrechner ohne CAS-System, weder grafikfähig noch programmierbar.  
Formelsammlung DMK mit eigenhändigen Ergänzungen, aber: keine numerische Beispiele, keine Zusatzblätter.

**RESULTATE:** Soweit wie möglich exakt angeben ( $\pi$  oder  $e$  oder nicht-aufgehende Wurzeln stehen lassen) oder auf 3 wesentliche Ziffern runden. Die Herleitung der Resultate ist ersichtlich, die Benutzung des Taschenrechners dokumentiert.

**PUNKTE:** Jede Teilaufgabe wird unabhängig vom Schwierigkeitsgrad mit 2 Punkten bewertet. Es sind somit 40 Punkte möglich, für die Maximalnote sind aber nicht alle nötig.

NAME: \_\_\_\_\_

PUNKTE: \_\_\_\_\_

NOTE: \_\_\_\_\_

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

1. ANALYSIS [6 P]

Gegeben ist die kubische Parabel

$$f: y = x^3 - 6x^2 + 8x + 1.$$

- a. Die Gerade  $g: y = k \cdot x + 1$  berührt die Parabel an der Stelle  $x = x_0 > 0$ . Bestimmen Sie den Parameter  $k$ .
- b. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der Geraden  $h: y = 5x - 9$  und der Parabel umschlossen wird.

2. ANALYSIS [8 P]

Unabhängige Teilaufgaben.

- a. Berechnen Sie exakt mittels einer geeigneten Substitution

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx.$$

- b. An welchen Stellen hat der Graph der Funktion

$$f: x \mapsto (4x^2 + 8x + 7) \cdot e^{-x}$$

horizontale Tangenten? Handelt es sich um lokale Maxima, lokale Minima oder Sattelpunkte? (Begründung!)

- c. In welchem Punkt des Graphen von

$$f: x \mapsto y = \ln x$$

hat die Tangente  $t$  die Steigung  $m = \frac{1}{2}$ . Wo und unter welchem Winkel schneidet  $t$  die  $y$ -Achse?

- d. Berechnen Sie das exakte Volumen des Körpers, der entsteht bei Rotation um die  $x$ -Achse der Kurve

$$y = e^{x/2} \quad (0 \leq x \leq \ln 2).$$

3. ANALYSIS [4 P]

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 6x^2}.$$

- a. Bestimmen Sie die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .
- b. Bestimmen Sie die Definitionslücken und das genaue Verhalten von  $f$  in deren Nähe.

## 4. VEKTORGEOMETRIE

[6 P]

Gegeben ist die Gerade  $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Wo und unter welchem Winkel schneidet  $g$  die  $yz$ -Ebene?
- Welcher Punkt  $P$  auf  $g$  liegt am nächsten beim Ursprung  $\mathcal{O}(0 | 0 | 0)$ ?
- Eine Gerade  $h$  schneidet die Gerade  $g$ , liegt parallel zur Ebene  $E : x - y + z + 4 = 0$  und geht durch den Punkt  $Q(-1 | 3 | 2)$ . Bestimmen Sie  $h$ .

## 5. VEKTORGEOMETRIE

[6 P]

Gegeben sind die Kugel mit Mittelpunkt  $M(3 | -5 | 6)$  und Radius  $r = 9$  sowie die Ebene  $E : 8x + 4y - z - 24 = 0$ .

- Die Ebene  $E$  bildet mit den Koordinatenebenen eine Pyramide. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.
- Die Kugel schneidet die  $xy$ -Ebene in einem Kreis. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.
- Bestimmen Sie die Tangentialebenen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  an die Kugel, welche parallel sind zur Ebene  $E$ . In welchen Punkten berühren Sie die Kugel?

## 6. STOCHASTIK

[10 P]

Unabhängige Teilaufgaben.

- Eine Münze soll beim Werfen Kopf zeigen mit einer Wahrscheinlichkeit  $p$  von höchstens 75 %. Sie dürfen die Münze 90 mal werfen. Wann werden Sie auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  die obige (Null-) Hypothese verwerfen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben sich beim Wurf von 10 Laplace-Würfeln mindestens 2 Dreier?
- Eine Urne enthalte 10 rote, 5 schwarze und 5 weiße Kugeln. Man zieht gleichzeitig zwei Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei rote Kugeln sind, wenn man weiß, dass mindestens eine Kugel rot ist.
- Wie viele 6-stellige Autonummern kann man mit den Ziffern  $0, 1, \dots, 8, 9$  und den 26 Buchstaben des Alphabets bilden, welche genau 2 Buchstaben enthalten und nicht mit Null beginnen? Zum Beispiel 19B4B4 oder FX0036.
- Zu Ostern sind 8 grüne, 6 rote und ein blaues Ei versteckt worden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 3 gefundenen Eiern genau 2 von gleicher Farbe?

