1. ANALYSIS

Gegeben ist die kubische Parabel f: $y = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$

a) Die Gerade g: $y = k \cdot x + 1$ berührt die Parabel an der Stelle $x = x_0 > 0$. Bestimmen Sie den Parameter k.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der Geraden h: $y = 5x - 9$ und der Parabel umschlossen wird.

---

a) Im Berührungspunkt müssen die y-Werte und die Steigungen übereinstimmen:

Für die Gerade gilt: $B(x_0 \mid kx_0 + 1)$ mit Steigung k

Für die Parabel gilt: $B(x_0 \mid x_0^3 - 6x_0^2 + 8x_0 + 1)$ mit der Steigung $f'(x_0) = 3x_0^2 - 12x_0 + 8$

Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\left| \begin{array}{rcl} x_0^3 - 6x_0^2 + 8x_0 + 1 & = & kx_0 + 1 \\ 3x_0^2 - 12x_0 + 8 & = & k \end{array} \right|$$

Wir setzen die 2. Gleichung in der ersten ein:

$$\begin{aligned} x_0^3 - 6x_0^2 + 8x_0 + 1 &= (3x_0^2 - 12x_0 + 8) \cdot x_0 + 1 \\ 0 &= 2x_0^3 - 6x_0^2 \\ 0 &= 2x_0^2 (x_0 - 3) \qquad x_0 = 3 > 0 \end{aligned}$$

Aus der Lösung für $x_0 = 3$ lässt sich mit der 2. Gleichung oben k berechnen:

k = -1

Variante: wenn wir die Schnittpunkte von f und g ergeben, sollte sich für die Berührungsstelle eine Doppellösung $x_1 = x_2$ ergeben; wie gross muss k sein, damit das so ist.

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 8x + 1 &= kx + 1 \\ x^3 - 6x^2 + (8 - k)\,x &= 0 \\ x\left[x^2 - 6x + (8 - k)\right] &= 0 \end{aligned}$$

Für eine Doppellösung der quadratischen Gleichung muss die Diskriminante 0 sein:

$$36 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - k) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1$$

b) Schnittstellen:

$$x^3 - 6x^2 + 8x + 1 = 5x - 9$$
$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5$$

Stammfunktion von $f - g = (x^3 - 6x^2 + 8x + 1) - (5x - 9) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

$$\int (x^3 - 6x^2 + 3x + 10)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + 10x = \frac{x}{4}\left(x^3 - 8x^2 + 6x + 40\right)$$

und nun die Flächeninhalte getrennt berechnen:

$$\left[\frac{x}{4}\left(x^3 - 8x^2 + 6x + 40\right)\right]_{-1}^{2} = \tfrac{2}{4}(8 - 32 + 12 + 40) + \tfrac{1}{4}(-1 - 8 - 6 + 40) = 14 + \tfrac{25}{4} = 20\tfrac{1}{4}$$

$$\left[\frac{x}{4}\left(x^3 - 8x^2 + 6x + 40\right)\right]_{2}^{5} = \tfrac{5}{4}(125 - 200 + 30 + 40) - 14 = \tfrac{-25}{4} - 14 = -20\tfrac{1}{4}$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist: $A = 20\tfrac{1}{4} + |-20\tfrac{1}{4}| = 40.5$

2. ANALYSIS

Unabhängige Teilaufgaben

a) Berechnen Sie exakt mittels einer geeigneten Substitution

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

Wir substituieren: $u = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x \, dx$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = -\int_{u_1}^{u_2} u^2 \, du = -\left[\frac{u^3}{3}\right]_{u_1}^{u_2} = -\left[\frac{\cos^3 x}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

b) An welchen Stellen hat der Graph der Funktion

$$f: \; x \text{ a } (4x^2 + 8x + 7) \cdot e^{-x}$$

Ableiten und Null setzen:

$$f'(x) = (8x + 8) \cdot e^{-x} + (4x^2 + 8x + 7) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (-4x^2 + 1) \cdot e^{-x} = 0$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}, \; x_2 = -\tfrac{1}{2}$$

Max, Min oder Sattelpunkt?

$f'(\tfrac{1}{2} - h) > 0$	$f'(\tfrac{1}{2} + h) < 0$	lokales Maximum
$f'(-\tfrac{1}{2} - h) < 0$	$f'(-\tfrac{1}{2} + h) > 0$	lokales Minimum

c) In welchem Punkt des Graphen von $f: \ x \mapsto y = \ln x$ hat die Tangente t die Steigung $m = \frac{1}{2}$? Wo und unter welchem Winkel schneidet t die y-Achse?

Wo hat der Graph f die Steigung $m = \frac{1}{2}$?

$$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2 \,|\, \ln 2)$$

Tangentengleichung t: $y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \ln 2$

Schnitt mit der y-Achse: $(0 \,|\, \ln 2 - 1)$

Winkel zur x-Achse: $\tan^{-1}(0.5) = 26.6°$

Winkel mit der y-Achse: $90° - 26.6° = 63.4°$

d) Berechnen Sie das exakte Volumen des Körpers, der entsteht bei Rotation um die x-Achse der Kurve

s

Wir benötigen das Quadrat der Funktion: $y^2 = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^x$

Damit gilt für das Drehvolumen:

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} e^x \, dx = \pi \left[e^x \right]_0^{\ln 2} = \pi \left(e^{\ln 2} - e^0\right) = \pi(2-1) = \pi$$

3. ANALYSIS

Gegeben ist die Funktion f mit: $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{2x^3 - 6x^2}$

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

b) Bestimmen Sie die Definitionslücken und das genaue Verhalten von f in deren Nähe.

---

a) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{2x^3 - 6x^2} = \dfrac{x^3 + 1}{2x^2(x - 3)}$

h sei eine sehr kleine positive Zahl:

Definitionslücken bei:

$x = 0:$ $f(\pm h) = \dfrac{1}{2(\pm h)^2 (-3)} < 0$ für $x \to 0$ $\Rightarrow$ $f(x) \to -\infty$

$x = 3:$ $f(3 - h) = \dfrac{28}{18(-h)} < 0$ von links her geht die Kurve gegen $-\infty$

$f(3 + h) = \dfrac{28}{18(h)} > 0$ von rechts her geht die Kurve gegen $+\infty$

4. Vektorgeometrie

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Wo und unter welchem Winkel schneidet g die yz-Ebene?

b) Welcher Punkt P auf g liegt am Nächsten beim Ursprung $O(0 \mid 0 \mid 0)$?

c) Eine Gerade h schneidet die Gerade g, liegt parallel zur Ebene E: $x - y + z + 4 = 0$ und geht durch den Punkt $Q(-1 \mid 3 \mid 2)$. Bestimmen Sie h.

---

a) In der yz-Ebene ist $x = 0$. Also:

$$1 + 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S(0 \mid 0 \mid 0.5)$$

Der Normalenvektor der yz-Ebene ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 = 1 \cdot 3 \cdot \sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sin^{-1}\left(\tfrac{|-2|}{3}\right) = 41.8°$$

b) $P(-1 - 2t \mid 1 + 2t \mid 1 + t)$

Der Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 - 2t \\ 1 + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix}$ muss senkrecht auf der Geraden g stehen:

$$\begin{pmatrix} -1 - 2t \\ 1 + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2 + 4t) + (2 + 4t) + (1 + t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\tfrac{5}{9}, \quad P\left(\tfrac{1}{9} \mid -\tfrac{1}{9} \mid \tfrac{4}{9}\right)$$

c) $P(-1 - 2t \mid 1 + 2t \mid 1 + t) \in h \quad \Rightarrow \quad \overline{QP} = \begin{pmatrix} -2t \\ -2 - 2t \\ -1 + t \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Geraden h.

Dieser Richtungsvektor muss senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene E stehen:

$$\begin{pmatrix} -2t \\ -2 + 2t \\ -1 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2t + (2 - 2t) + (-1 + t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{1}{3}$$

Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Gleichung von h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. VEKTORGEOMETRIE

Gegeben sind die Kugel mit Mittelpunkt $M(3 \mid -5 \mid 6)$ und Radius $r = 9$
sowie die Ebene E: $8x + 4y - z - 24 = 0$

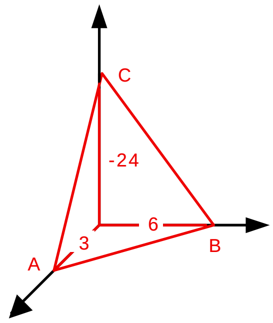
a) Die ebene E bildet mit den Koordinatenachsen eine Pyramide.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

b) Die Kugel schneidet die xy-Ebene in einem Kreis.
Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

c) Bestimmen Sie die Tangentialebenen τ_1 und τ_2 an die Kugel, welche parallel sind zur Ebene E.
In welchen Punkten berühren sie die Kugel?

---

a) Schnitt mit der x-Achse: $y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$
Schnitt mit der y-Achse: $x = z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6$
Schnitt mit der z-Achse: $y = x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -24$



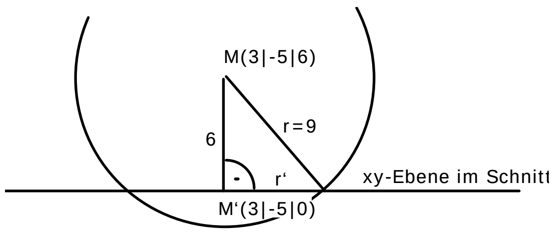
Die Grundfläche OAB misst $G = \dfrac{3 \cdot 6}{2} = 9$

Die Höhe ist $h = 24$

Das Volumen ist $V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 24 = 72$

b)

$r'^2 = 81 - 36 \quad \Rightarrow \quad r' = 3\sqrt{5}$



c) Parallelebenen $8x + 4y - z + k = 0$ zu E im Abstand ± 9 vom Mittelpunkt

$$\frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot (-5) - 6 + k}{\sqrt{64 + 16 + 1}} = \pm 9 \quad \Rightarrow \quad 24 - 20 - 6 + k = \pm 81 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 81 + 2$$

Tangentialebenen: τ_1: $8x + 4y - z + 83 = 0$ und τ_2: $8x + 4y - z - 79 = 0$

Der Berührungsradius hat die Richtung $\pm \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Länge 9, was gerade stimmt.

M entsprechend verschoben ergibt: $B_1\,(-5 \mid -9 \mid 7)$ und $B_2\,(11 \mid -1 \mid 5)$.

6. Stochastik

Unabhängige Teilaufgaben

---

a) Eine Münze soll beim Werfen Kopf zeigen mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 75%. Sie dürfen die Münze 90 mal werfen. Wann werden Sie auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die obige (Null-) Hypothese verwerfen?

$$\sum_{x=k}^{90} \binom{90}{x} \cdot 0.75^{x} \cdot 0.25^{90-x} \le 0.05$$

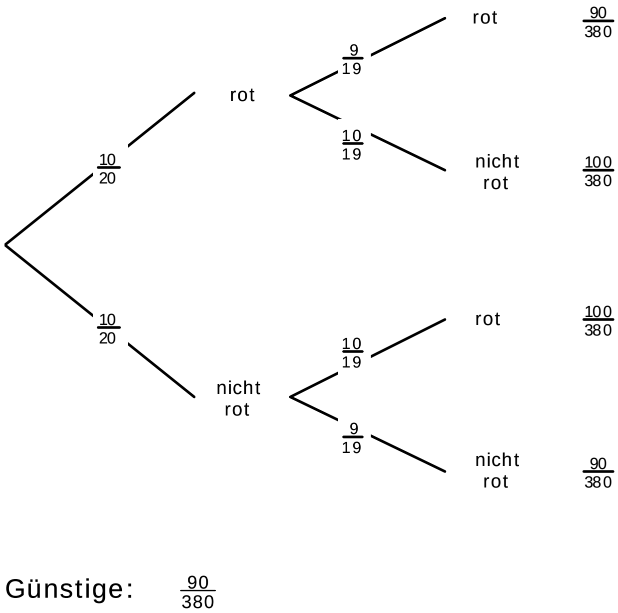
Probieren: $k = 75 \rightarrow 0.034$ ist das kleinste k, das die Bedingung erfüllt

$k = 74 \rightarrow 0.068$ $0.068 > 0.05$!

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergeben sich beim Wurf von 10 Laplace-Würfeln mindestens 2 Dreier?

$$\sum_{x=2}^{10} \binom{10}{x} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^{x} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10-x} = 0.515$$

c) Eine Urne enthalte 10 rote, 5 schwarze und 5 weisse Kugeln. Man zieht gleichzeitig zwei Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei rote Kugeln sind, wenn man weiss, dass mindestens eine Kugel rot ist.



Günstige: $\frac{90}{380}$

Mögliche: $\frac{90+100+100}{380}$ $\quad p = \dfrac{\frac{90}{380}}{\frac{90+100+100}{380}} = \dfrac{90}{290} = \dfrac{9}{29}$

d) Wie viele 6-stellige Autonummern kann man mit den Ziffern 1, 1, . . . ,8, 9 und den 26 Buchstaben des Alphabets bilden, welche genau 2 Buchstaben enthalten und nicht mit Null beginnen? Zum Beispiel $\boxed{\text{19B4B4}}$ oder $\boxed{\text{FX0036}}$.

Ohne die Einschränkung mit der Null:

$\binom{6}{2} \cdot 26^2$ Möglichkeiten für die Buchstaben

und

10^4 Möglichkeiten für die 10 Ziffern

also total

$$\binom{6}{2} \cdot 26^2 \cdot 10^4 = 101'400'000$$

Davon sind abzuzählen alle mit Null am Anfang:

1. Stelle ist Null

$\binom{5}{2} \cdot 26^2$ Möglichkeiten für die Buchstaben

10^3 Möglichkeiten für die 10 Ziffern

also total

$$1 \cdot \binom{5}{2} \cdot 26^2 \cdot 10^3 = 6'760'000$$

Es gibt also $101'400'000 - 6'760'000 = 94'640'000$ mögliche Autonummern.

e) Zu Ostern sind 8 grüne, 6 rote und ein blaues Ei versteckt worden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 3 gefundenen Eiern genau 2 von gleicher Farbe?

2 grüne und ein nicht grünes: $\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{28 \cdot 7}{455} = \frac{196}{455}$

oder

2 rote und ein nicht rotes: $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{15 \cdot 9}{455} = \frac{135}{455}$

ergibt: $p = \frac{196 + 135}{455} = \frac{331}{455}$