Aufgabe 1

I $\quad f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x^2-4) - 2x\,(x^2+2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-12x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-12\,(x^2-4)^2 - 2\,(x^2-4)\cdot 2x\cdot(-12x)}{(x^2-4)^4} = \frac{-12\,(x^2-4)+48x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{36x^2+48}{(x^2-4)^3}$$

Die Ableitung des Nenners von f' ist: $2\,(x^2-4)\cdot 2x$ (Kettenregel)

Anschliessend wird der Bruch mit (x^2-4) gekürzt.

$D = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Nullstellen: $x^2+2=0$ hat keine reellen Lösungen, keine Nullstellen.

Extrema: $-12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$$f'(0-\Delta x) = \frac{-12\,(0-\Delta x)}{(x^2-4)^2} = \frac{+12\Delta x}{(x^2-4)^2} > 0 \text{ für } \Delta x > 0 \text{ steigend}$$

$$f'(0+\Delta x) = \frac{-12\,(0+\Delta x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-12\Delta x}{(x^2-4)^2} < 0 \text{ für } \Delta x > 0 \text{ fallend}$$

Der Nenner ist sicher positiv. Maximum in $(0|-0.5)$

Pole bei $x = \pm 2$, waagrechte Asymptote bei $y = 1$

II $\quad f(x) = 2\sqrt{x^2-c}$

$$f'(x) = 2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-c}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-c}}$$

$$f'(5) = \frac{10}{\sqrt{25-c}} = \frac{5}{2}$$

$$5\sqrt{25-c} = 20$$

$$\sqrt{25-c} = 4$$

$$25-c = 16$$

$$c = 9$$

Aufgabe 2

I a) $f'(x) = x \cdot (4x^3 + 1) + 0.5 \cdot x^2 \cdot 12x^2 = 4x^4 + x + 6x^4 = 10x^4 + x = x(10x^3 + 1)$

Produktregel. Sie können auch zuerst die Klammer ausmultiplizieren.

b) $h'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

II a) $\displaystyle\int_0^a (x^2 - a \cdot x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} = -\frac{a^3}{6} = -4.5$

$$a^3 = 27$$
$$a = 3$$

b) $f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$

Die Funktion ist punktsymmetrisch und schneidet die Achse bei 0, +2 und −2. Es genügt eine Hälfte zu berechnen.

$$\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = (4 - 8) - 0 = -4 \quad \Rightarrow \quad A = 8$$

Aufgabe 3

I. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\begin{array}{l} f(1) = -5 \\ f(2) = 0 \\ f(0) = -4 \\ f'(0) = -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} a + b + c + d &=& -5 \\ 8a + 4b + 2c + d &=& 0 \\ d &=& -4 \\ c &=& -2 \end{array}$$

Auflösen mit dem Taschenrechner (oder rasch von Hand): $f(x) = x^3 - 2x - 4$

II. Gleichung der Geraden: $\dfrac{x}{24} + \dfrac{y}{18} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y = 72 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{3}{4}x + 18$

Die Seiten des Rechtecks sind: x und $y = -\dfrac{3}{4}x + 18$

$A = x\left(-\dfrac{3}{4}x + 18\right) = -\dfrac{3}{4}x^2 + 18x \quad \Rightarrow \quad A' = -\dfrac{3}{2}x + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12,\ y = 9$

Es ist ein Maximum, denn die Funktion A ist eine nach unten offene Parabel.

Aufgabe 4

I. $f'(x) = 8 \cdot e^{-x} + 8x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 8e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ und $M(1|\frac{8}{e})$

(Produkt und Kettenregel)

II. Schnitt mit der y-Achse bei $y = e^{-\frac{1}{4}\cdot 0+2} = e^2 \quad \Rightarrow \quad S(0|e^2)$

$g'(x) = e^{-\frac{1}{4}x+2} \cdot (-\frac{1}{4}) \quad \Rightarrow \quad g'(0) = e^2 \cdot (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}e^2$

Gleichung der Tangente: $y - e^2 = -\frac{1}{4}e^2(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}e^2 x + e^2$

III. Wachstumsfunktion: $f(x) = a \cdot e^{bx}$

$$\begin{array}{l} f(3) = 66'000 \\ f(5) = 1'100'000 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 66'000 = a \cdot e^{3b} \\ 1'100'000 = a \cdot e^{5b} \end{array}$$

Division der 2. Gleichung durch die erste ergibt:

$$e^{2b} = \frac{1'100'000}{66'000} = \frac{50}{3}$$
$$2b = \ln(\tfrac{50}{3})$$
$$b = \ln(\tfrac{50}{3}) : 2 \approx 1.4$$

(exakten Wert speichern!)

Dann ist: $a = \dfrac{66'000}{e^{3b}} \approx 970$ (speichern!)

a) Verdoppelungszeit: $x = \dfrac{\ln 2}{b} \approx 0.495\,h$ rund eine halbe Stunde.

b) $f(6) = a \cdot e^{6b} \approx 4.5 \cdot 10^6$

Aufgabe 5

a) $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 24 \\ 48 \end{pmatrix} \quad /\!/ \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E: \quad 2x + y + 2z = 8 + 0 + 8 = 16$

b)

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ Länge der Seite b: $b = \sqrt{64 + 64 + 16} = 12$

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ Länge der Seite a: $a = \sqrt{36 + 0 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ Länge der Seite c: $c = \sqrt{4 + 64 + 4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

c) Der rechte Winkel muss bei B sein (da $a = c$):

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -12 + 0 + 12 = 0$

d) Punkt C um den Vektor $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ verschieben: $D(8|8|-4)$

e) Diese Gerade ist senkrecht zur Ebene ABC und geht durch den Mittelpunkt des Quadrates:

Normale zur Ebene ABC: $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -24 \\ -48 \end{pmatrix} \; /\!/ \; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Mittelpunkt des Quadrates = Mittelpunkt der Diagonalen AC: $M(6|4|0)$

Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

a) $A(1|1|1)$ $\quad 1-1+1=1$

$B(3|3|1)$ $\quad 3-3+1=1$

$C(0|y|5)$ $\quad 0-y+5=1 \quad \Rightarrow \quad y=4 \quad \Rightarrow \quad C(0|4|5)$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73.9°$

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 = \sqrt{8} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 73.9°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 32.2°$

c) Lot von M auf die Ebene E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Durchstosspunkt des Lotes mit der Ebene: $(4+t)-(-t)+(3+t)=1 \quad \Rightarrow \quad t=-2$

Durchstosspunkt: $D(2|2|1)$

Länge von $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} \qquad \Rightarrow$

d) Die Ebene F ist bestimmt durch die Punkte $H(6|-2|8)$ und $M(0|4|C)$

und durch den Mittelpunkt der Strecke AB: $D(2|2|1)$:

$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad /\!/ \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F: \quad x+y=4$