Aufgabe 1

Gegeben sind: g: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$, h: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

a) Schnittpunkt der Geraden: Achtung: verschiedene Parameter wählen!

$$\begin{array}{lll} 1 + 4t = 5 & \Rightarrow \quad t = 1 & \\ 1 + t = 5 + s & \qquad\qquad \Rightarrow \quad s = -3 & \text{also: } \mathbf{S\,(5|2|5)} \\ 4 + t = 2 - s & \qquad \text{Kontrolle: } 4 + 1 = 2 - (-3) & \end{array}$$

Schnittwinkel: $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 + 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90°$

b) Ebene E durch g und h aufgespannt; bekannt sind zwei Vektoren dieser Ebene und mittlerweile drei Punkte.

$\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix} \quad /\!/ \quad \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$; damit ist E: $x - 2y - 2z = 1 - 2 - 8 = -9$

Abstand des Nullpunktes von E: $d = \dfrac{0 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 + 9}{3} = 3$

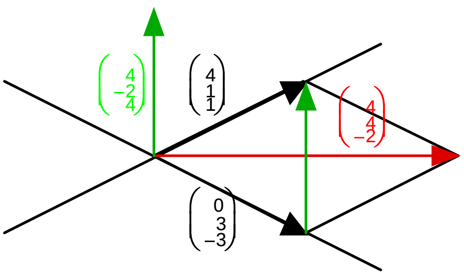
c) Diese Ebene F geht durch $S\,(5|2|5)$

F steht senkrecht auf E, der 1. Richtungsvektor ist: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

Der 2. Richtungsvektor wird durch die Winkelhalbierenden der Geraden bestimmt.

$\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ hat die Länge $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ hat die Länge $\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$ sind gleich lang.

Die Winkelhalbierenden haben die Richtung $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix} \;/\!/\; \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$



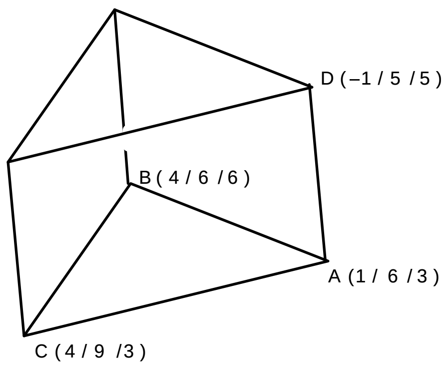
oder $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} \;/\!/\; \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Die gesuchten Ebenen haben die Gleichung:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} \;/\!/\; \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x - y + 2z = 10 - 2 + 10 = 18$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\3\end{pmatrix} \;/\!/\; \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y - z = 10 + 4 - 5 = 9$$

Aufgabe 2



a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad BC = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AC = 3\sqrt{2}$$

b) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E(4-2|6-1|6+2) = E(2|5|8)$

$$F(4-2|9-1|3+2) = F(2|8|5)$$

c) Normale zur Grundfläche: $\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\9\\9\end{pmatrix} \;/\!/\; \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Das ergibt für Aufgabe d) die Gleichung der Ebene ABC: $x - y - z = -8$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} = 2 - 1 + 2 = 3 = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 35.26°$$

($\sin\gamma$, weil ein Normalen- und ein Richtungsvektor beteiligt sind)

d) Die Höhe der Pyramide muss das Dreifache der Prismahöhe betragen:

Höhe des Prismas:

Ebene ABC (siehe c): $x - y - z + 8 = 0$

Abstand des Punktes D von dieser Ebene: $\left| \dfrac{-1 - 5 - 5 + 8}{\sqrt{3}} \right| = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Höhe der Pyramide: $h = 3\sqrt{3}$

Der Punkt $S(x|0|0)$ muss also von der Ebene den Abstand $h = 3\sqrt{3}$ haben:

$$\left| \frac{x - 0 - 0 + 8}{\sqrt{3}} \right| = 3\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x + 8 = \pm 9 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -17$$

Es ergibt sich: $S_1\,(1|0|0)$ und $S_2\,(-17|0|0)$

e) Die Punkte liegen auf den räumlichen Winkelhalbierenden der acht Quadranten.
Es gibt also acht derartige Punkte.

Aufgabe 3

a) Neigungswinkel g der Geraden zur Ebene:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2+0+1 = 3 = 3\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\gamma \quad\Rightarrow\quad \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \gamma = 45°$$

b) 1. Punkt von g': der Schnittpunkt von g mit der Ebene:

$$2(3+t)+2(6)+(3+t)-30 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 3 \quad\Rightarrow\quad S(6|6|6)$$

Der 2. Punkt ist der Spiegelpunkt von $G(3|6|3)$.

Lot von G auf die Ebene: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene für: $2(3+2t)+2(6+2t)+(3+t)-30 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 1$

Zu G' gelangt man mit $t = 2 \quad\Rightarrow\quad G'(7|10|5)$

Gleichung der Spiegelgeraden g': $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$

c) Punkte auf g haben die Koordinaten $Q(3+t|6|3+t)$

Für ihren Abstand von der Ebene gilt:

$$\left|\frac{2(3+t)+2(6)+(3+t)-30}{3}\right| = 6 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2(3+t)+2(6)+(3+t)-30}{3} = \pm 6$$

$$6+2t+12+3+t-30 = \pm 18$$
$$3t-9 = \pm 18$$
$$\Rightarrow \quad t_1 = 9 \quad\Rightarrow\quad Q_1(12|6|12)$$
$$t_2 = -3 \quad\Rightarrow\quad Q_2(0|6|0)$$

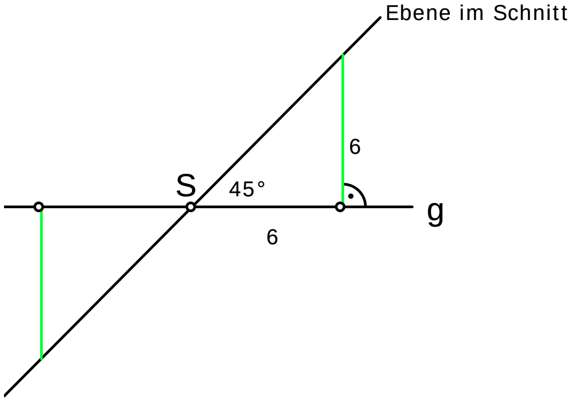
d) Die Verbindungsgerade v dieser beiden Punkt muss durch $S(6|6|6)$ gehen.

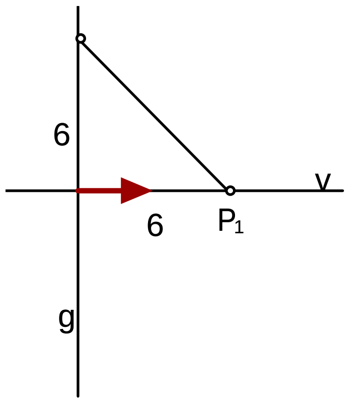
v liegt in der Ebene, ihr Richtungsvektor ist senkrecht zum Normalenvektor $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ von E

ausserdem ist sie rechtwinklig zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ von g.

Damit erhalten wir ihren Richtungsvektor aus $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

Dabei ist $|\vec{v}| = 3$.





Achtung: der Abstand des Punktes von g ist 6. Deshalb ist der rechte Winkel bei g.

Da der Neigungswinkel der Geraden zur Ebene 45° ist (s. a)), ist auch der Abstand PS gerade 6. Mit $\pm 2 \cdot \vec{v}$ gelangt man von S zu den beiden Punkten:

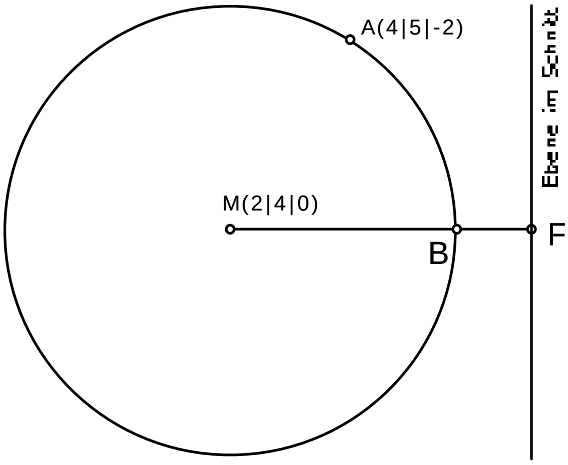
$$\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} + 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\\10\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_1\,(2|8|10)$$

$$\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\4\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_2\,(10|4|2)$$

Das Ganze können Sie sich viel besser vorstellen, wenn Sie sich ein Modell basteln:

- Styroporplatte als Ebene
- Stricknadel unter 45° als g einstecken
- Eine zweite Stricknadel als v rechtwinklig zu g und durch S in die Ebene legen

Aufgabe 4



Kugel im Schnitt

a) $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$r = \sqrt{4+1+4} = 3$

b) Lot von M auf die Ebene: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene: $(2+t)+(4+2t)+(2t)+26 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -4$

Fusspunkt: $F(-2|-4|-8)$

Abstand MF: $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad MF = \sqrt{16+64+64} = 12$

damit ist der Abstand BF: $BF = MF - r = 12 - 3 = 9$

c) Die Tangentialebene F steht senkrecht auf dem Berührungsradius;

ihr Normalenvektor ist: $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

der Normalenvektor von E ist: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

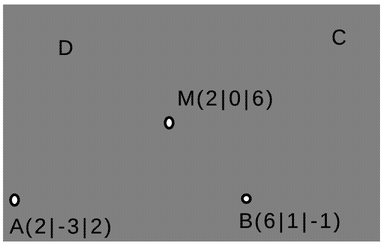
und der Zwischenwinkel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2+2-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90°$

d) Die Richtung der Schnittgeraden von E und F ist: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Länge 3)

Die Schnittpunkte erhält man mit: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1(4|2|1),\ S_2(0|6|-1)$

Aufgabe 5

a) Die Diagonalen halbieren sich:



$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C\,(2|3|10)$$

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D\,(-2|-1|13)$$

b) Normale der Parallelogrammebene: $\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{n}_E$

Normale der Grundrissebene: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 25 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 = \sqrt{1025} \cdot 1 \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = 68.0°$$

c) Dieser Abstand entspricht der halben Höhe zu AB des Parallelogramms.

Fläche des Parallelogramms: $2\sqrt{1025}$ ($\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{BM}$ ergibt die halbe Fläche)

Grundlinie AB: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{16 + 16 + 9} = \sqrt{41}$

$$h = \frac{\text{Fläche}}{\text{Grundlinie}} = \frac{2\sqrt{1025}}{\sqrt{41}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1025}{41}} = 2 \cdot \sqrt{25} = 10 \text{ w}$$

Der Abstand des Punktes M von der Geraden AB ist 5.

d) Beim Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Mittelpunkt auf der x-Achse: $M'\,(1|0|0)$

$$\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{BM'} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-6) - 3 - 2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-7)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad M'_1\,(7|0|0),\ M'_2\,(1|0|0)$$