Aufgabe 11

a) Alle Punkte, die von A und B denselben Abstand haben, liegen auf der mittelsenkrechten Ebene von A und B:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad M_{AB}\,(-1|0|5) \qquad \text{Ebene:}\ \ 5x - 5y - z = -10$$

Da auch $M \in g$ sein muss, ist der Schnittpunkt zu berechnen:

$$5\,(8 + 8t) - 5\,(-2 - 4t) - (1 + t) + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad M(0|2|0)$$

Radius: $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9$

b) Die Tangentialebenen stehen senkrecht auf den Berührungsradien:

Normalenvektoren: $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -24 - 21 + 24 = -21 = 9 \cdot 9 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos a = \left| -\frac{21}{81} \right| \quad \Rightarrow \quad \alpha = 75.0°$$

c) Der Richtungsvektor der Geraden $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat gerade die gleiche Länge wie der Radius.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt die beiden Punkte: $P\,(-8|6|-1),\ Q\,(8|-2|1)$

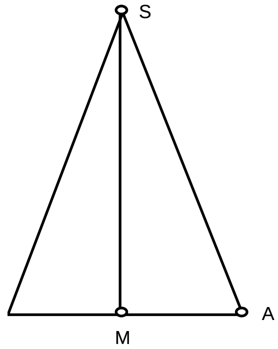
Das Volumen lässt sich mit dem Spatprodukt berechnen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 72 \\ 74 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 72 \\ 74 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = 540$$

$$V = \frac{540}{6} = 90$$

Aufgabe 12



$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h = 3, \qquad \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 6$

a) Normal zu $\overrightarrow{MS}$, durch M (oder A): E: $2x - y - 2z = -6$

b) Wie üblich mit dem Skalarprodukt; hier zur Abwechslung mit Trigonometrie:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 63.43° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 126.9°$$

c) $\overrightarrow{MA'}$ liegt in der Ebene E, steht also senkrecht auf $\overrightarrow{MS}$;
$\overrightarrow{MA'}$ ist ausserdem rechtwinklig zu $\overrightarrow{MA}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MA'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{(MA' muss gleich lang sein wie MA)}$$

Aus $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A'_1\,(5|8|4) \\ A'_2\,(-3|0|0) \end{matrix}$

d) Die Höhe dieses Kegels muss 6 sein und die Spitze auf der x-Achse, in $(x|0|0)$ liegen:

HNF: $\dfrac{2x - 0 - 0 + 6}{3} = \pm 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad (6|0|0), \quad (-12|0|0)$

Aufgabe 13

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind in der Ebene liegende Vektoren; $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

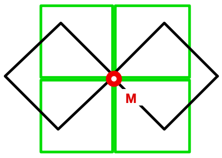
Als Ebenengleichung erhalten wir: E: $2x + y - 2z = 0$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 = 3 \cdot 1 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 48.2°$

Schnitt mit der yz-Ebene: $x = 4 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad A(0|2|1)$

Schnitt mit der xz-Ebene: $y = -2 + 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad B(2|0|2)$

c) Die Normalebene durch die Mitte M von AB ergibt die gezeichnete Schnittfigur



d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; Länge: 3

Der Mittelpunkt von AB ist: $(1|1|1.5)$

Wir benötigen eine Richtung in E, also rechtwinklig zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und rechtwinklig zu $\overrightarrow{AB}$:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; auch dieser Vektor hat die Länge 3.

Damit erhalten wir die Punkte: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (1|4|3) \\ (-1|0|-1) \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (3|2|4) \\ (1|-2|0) \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (1.5|2|2.5) \\ (0.5|0|0.5) \end{matrix}$

Aufgabe 14

a) $S\left(\frac{9+0+0}{3}\middle|\frac{0+6+0}{3}\middle|\frac{0+0+3}{3}\right) = S(3|2|1)$

b) $\vec{n}_{ABC} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{ABO} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} = 54 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Anschaulich auch direkt erhältlich.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 = 7 \cdot 1 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 31.0°$

c) Die ersten drei Teilflächen liegen in den Koordinatenebenen:

AOC: $F_1 = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13.5$

BOC: $F_2 = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

AOB: $F_3 = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27$

ABC: $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_4 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| == \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = 31.5$

Die Oberfläche ist also: $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 81$

d) Der Inkreismittelpunkt liegt im Schnittpunkt der vier winkelhalbierenden Ebenen. Die ersten drei gewinnt man am besten aus der Anschauung: es sind die winkelhalbierenden Ebenen des 1. Quadranten:

von AOC und BOC: $x - y = 0$

von AOC und AOB: $y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = z$, der Punkt liegt auf der $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

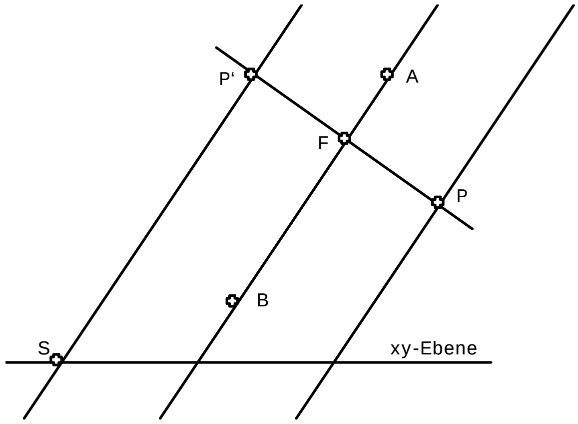
von BOC und A=B: $x - z = 0$

von BOC und A=B: HNF: $\frac{2t + 3t + 6t - 18}{7} = \pm\frac{t}{1} \quad \Rightarrow \quad 11t \mp 7t = 18$

$t = 4.5$ ergibt einen Punkt ausserhalb des Tetraeders (Mittelpunkt einer Ankugel)

$t = 1 \quad \Rightarrow \quad M(1|1|1)$

Aufgabe 15



a) Achse AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ebene senkrecht zur Achse durch P:

$$2x + 2y + 3z = 3$$

Schnitt mit der Achse:

$$2(4 + 2t) + 2(2t) + 3(2 + 3t) = 3$$

$$t = -1 \quad \Rightarrow \quad F(2|-2|-1)$$

Radius: $\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 7$

b) P wird an der Zylinderachse gespiegelt:

P' erhält man aus: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(-1|4|-3)$

Mantellinie durch P': $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der xy-Ebene für: $z = -3 + 3t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad S(1|6|0)$

c) Die Normale der Tangentialebene ist der Berührungsradius:

$$\vec{n}_{xy} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 = 1 \cdot 7 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 73.4°$$