Aufgabe 16

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 42 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Seitenlängen sind: $b = AC = 12 \cdot \sqrt{6}, \quad c = AB = 18\sqrt{6}$

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 144 - 144 + 504 = 504 = 12\sqrt{6} \cdot 18\sqrt{6} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 67.1°$

b) $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1080 \\ -360 \\ 360 \end{pmatrix} = -360 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ Fläche $A = \frac{1}{2} \cdot 360\sqrt{11} \approx 597.0$

c) $S\left(\frac{0+12+12}{3} \middle| \frac{1+13+43}{3} \middle| \frac{6+30+0}{3}\right) = S(8|19|12)$

d) Gerade CB=a: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 30 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad H \in a \quad \Rightarrow \quad H(12|13+t|30-t)$

$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12+t \\ 24-t \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf a:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12+t \\ 24-t \end{pmatrix} = 12 + t - (24 - t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6 \quad \Rightarrow \quad H(12|18|18)$$

e) Die Richtung der Winkelhalbierenden entspricht der Richtung der Diagonalen im Rhombus. $1.5 \cdot \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ spannen einen Rhombus auf:

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 42 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad w: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

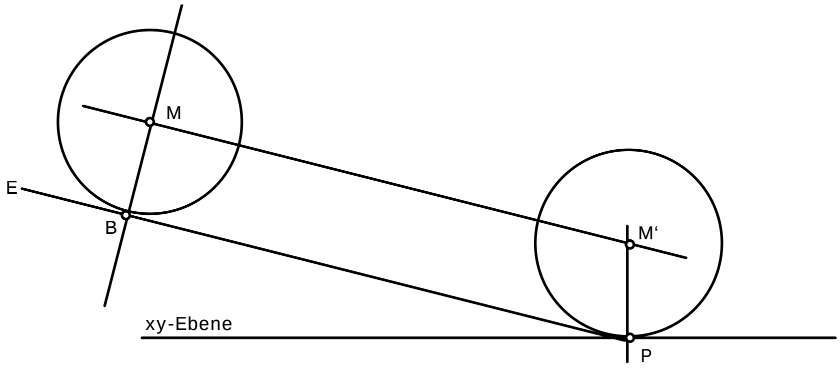
Schnitt mit AC:

$$\left| \begin{array}{l} 0 \qquad t = 12 \\ 1 + 2t = 13 + s \\ 6 + \quad t = 30 - s \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad t = 12 \quad \Rightarrow \quad s = 12 \qquad \text{Kontrolle:} \quad 6 + 12 = 30 - 12$$

$W(12|25|18)$

Aufgabe 17

a) $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2 = 3\cdot 1\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = 48.2°$



b) Lot zu E durch M: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\13\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2(2t)+(3+t)+2(13+2t)-20=0 \quad\Rightarrow\quad t=-1 \quad\Rightarrow\quad B(-2|2|11)$

Radius der Kugel: $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad r = 3$

c) Sie bewegt sich senkrecht zu $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ auf der Fallgeraden.

Die Fallgerade verläuft auf der Ebene senkrecht zur Spurlinie in der xy-Ebene:
Für die Spurlinie gilt: $2x+y-20=0 \quad\Rightarrow\quad$ z.B. $(10|0|0)$ und $(0|20|10)$

Die Spurlinie hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}10\\-20\\0\end{pmatrix} = 10\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Richtung der Fallgeraden: $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad MM'$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\13\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$

Die Kugel berührt die Grundrissebene für

$z = 13-5t = 3 \quad\Rightarrow\quad t=2 \quad\Rightarrow\quad M'(8|7|3)$ und $P(8|7|0)$

Anmerkung: P liegt nicht im für die Kugel unerreichbaren Schnittpunkt mit der Spurlinie.

Aufgabe 18

a) Die Diagonalen des Rhombus halbieren sich und damit auch die Höhe.

b) $A(3|0|4)$, $B(3|3|0)$, $C(0|3|4)$, $S(0|0|8)$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Die Seitenlänge ist 5m.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 16 = 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 50.2°$$

d) $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}$, der Betrag davon ist $\sqrt{369} = 3\sqrt{41}$

Die Gesamtfläche des Daches ist: $4 \cdot 3\sqrt{41} = 12\sqrt{41} \approx 76.8\,\mathrm{m}^2$

e) Die Normale des Rhombus ABCS ist: $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (s. vorhergehende Aufgabe)

Die Normale des links anschliessenden Rhombus ist: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 9 = \sqrt{41} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = 77.3°$$

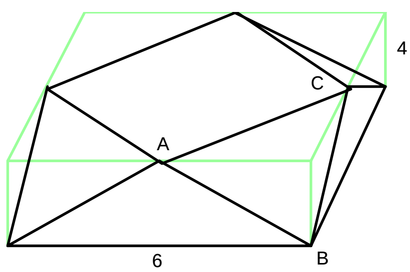
f) Der Unterbau ist ein Quader: $V_1 = 6 \cdot 6 \cdot 32 = 1152$

Der oberste Teil ist eine Pyramide: $V_2 = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4 = 24$

Der mittlere Teil ist ein Quader, dem man an jeder Ecke eine Pyramide weggeschnitten hat:

$$\begin{aligned} V_3 &= \text{Quader} - 4 \text{ Pyramiden} \\ &= 36 \cdot 4 - 4 \cdot \tfrac{1}{3}Gh \\ &= 144 - 4 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 4.5 \cdot 4 = 120 \end{aligned}$$

Gesamtvolumen: $V = 1152 + 144 + 120 = 1296\,\mathrm{m}^2$



Das obere Quadrat ist halb so gross wie das untere. Die obere Fläche einer Pyramide ist ein Viertel des obern Quadrates.

Aufgabe 19

a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}^2 = 81 + 9 + 36 = 126$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}^2 = 9 + 36 + 9 = 54 \quad \Rightarrow \quad AC > AB$

b) Die Bergspitzen liegen für Punkte in der Ebene ABC im Allgemeinen auf einer Geraden:

$$\text{Ebene ABC:} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ -45 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3x - y - 5z = -35$$

Wir setzen $T'(0|0|z)$ und erhalten: $-5z = -35 \quad \Rightarrow \quad z = 7 \quad \Rightarrow \quad T'(0|0|7)$;

Von T aus muss man 6 aufsteigen.

c) Zwei Punkt scheinen gleich hoch, wenn man sie unter dem gleichen Winkel sieht;

Wir nehmen der Einfachheit halber alle Punkte um 1 herunter:
$T(0|0|0)$, $A'(-3|4|5)$, $B'(0|10|8)$ und betrachten das Steigungsdreieck.

Bei T und A ist die Horizontaldistanz $\sqrt{9+16} = 5$, die vertikale Seite 5;
Bei T und B ist die Horizontaldistanz gerade 10, die vertikale Seite muss für den gleichen Höhenwinkel von 45° auch 10 sein; das ist zwei mehr als aktuell.

d) $M_{BC}(3|8.5|10.5)$

Die Gerade AM_{BC} $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ schneidet die xy-Ebene in

$z = 6 + 3t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2$

Der gesuchte Punkt ist $(-11|-2|0)$.

Aufgabe 20

a) Für die rechten Winkel müsste jedes der drei möglichen Skalarprodukte 0 ergeben.

Wie man leicht sieht, müssen in jedem Fall die gleichen Rechnungen (nur in anderer Reihenfolge) durchgeführt werden:

$$st\,(t^2 - st) + (s^2 - st)\,st + (t^2 - st)(s^2 - st) = st^3 - s^2t^2 + s^3t - s^2t^2 + s^2t^2 - st^3 - s^3t + s^2t^2 = 0$$

Dass die Vektoren gleiche Beträge haben ergibt sich aus der Tatsache, dass überall die gleichen Komponenten vorkommen.

b) Es ist $\vec{a}^2 = (st)^2 + (s^2 - st)^2 + (t^2 - st)^2$

$$= s^2t^2 + (s^4 - 2s^3t + s^2t^2) + (t^4 - 2st^3 + s^2t^2) = s^4 - 2s^3t + 3s^2t^2 - 2st^3 + t^4$$

Um die Behauptung zu beweisen muss gezeigt werden, dass dieser Term eine Quadrat ist, dass also die Wurzel immer gezogen werden kann.

Ein Term mit fünf Gliedern muss Quadrat eines Trinoms sein: wie

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

Auf einen derartigen Term lässt sich unser Quadrat ändern in:

$$s^4 - 2s^3t + 3s^2t^2 - 2st^3 + t^4 = s^4 + s^2t^2 + t^4 - 2s^3t + 2s^2t^2 - 2st^3 = (s^2 - st + t^2)^2$$

Der Betrag ist $s^2 - st + t^2$ und bei ganzzahligen s und t sicher ganzzahlig.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

Das ergibt (nebst dem Ursprung) die Ecken:
$(15|-6|10)$, $(25|9|4)$, $(10|15|-6)$, $(-6|10|15)$, $(9|4|25)$, $(19|19|19)$, $(4|25|9)$
(Machen Sie eine Skizze des Würfels!)

d) Der Betrag der Komponenten ist gemäss b) $s^2 - st + t^2 = 1 - t + t^2$ und das ist 1 mehr als die grösste Komponente von $\begin{pmatrix} t \\ 1 - t \\ t^2 - t \end{pmatrix}$.