

Aufgabe 21

a) Gleichung der Geraden AB:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P(14 - 2t | 2t | 8 + t)$ sind die Koordinaten der Ecke P.

Der Quader hat die Kantenlängen $14 - 2t$, $2t$ und $8 + t$

$$V = 2t(14 - 2t)(8 + t) = -4t^3 - 4t^2 + 224t$$

$$\text{Extremwert für: } V' = -12t^2 - 8t + 224 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, \quad t_2 = -\frac{14}{3}$$

Für $t = 4$ erhalten wir den Punkt $P(6 | 8 | 12)$, der auf der Strecke AB liegt: $V = 576$

Es handelt sich tatsächlich um ein Maximum:

vorher: $V'(3) > 0$ die Kurve steigt.

nachher: $V'(6) < 0$ die Kurve fällt.

b) Für t_2 erhalten wir den Punkt $P'(\frac{70}{3} | -\frac{28}{3} | \frac{10}{3})$

Das dazugehörige Volumen ist aber ein relatives Minimum:

vorher: $V'(-5) < 0$ die Kurve fällt.

nachher: $V'(-4) > 0$ die Kurve steigt.

Aufgabe 22

Ecke $C(7-t|1|1+t)$

Vektoren der Seiten a und b: $\overline{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{BC} = \begin{pmatrix} 5-t \\ -1 \\ 1+t \end{pmatrix}$

Die Fläche wird mit dem Vektorprodukt berechnet: $\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{pmatrix} -1(1+t)+1 \\ (5-t)+(1+t) \\ 1+(5-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 6 \\ 6-t \end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich für das Quadrat der Fläche:

$$F^2 = t^2 + 36 + (6-t)^2 = 2t^2 - 12t + 72$$

Extremwert für:

$$F^{2'} = 4t - 12 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ und } C(4|1|4)$$

Es handelt sich tatsächlich um ein Minimum:

vorher: $F^{2'}(2) < 0$ die Kurve fällt.

nachher: $F^{2'}(4) > 0$ die Kurve steigt.

Aufgabe 23

$A(-5|3|-6)$ und $X(-5+2t|3-t|-6+2t)$ sind Punkte der Geraden.

- a) Die Vektoren $\overline{AP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden g bilden ein Parallelogramm mit der Grundlinie $|\vec{v}| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Dessen Fläche berechnet sich aus dem Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Fläche: } F = 6 \cdot 3 = 18$$

Die Höhe dieses Parallelogramms entspricht dem Abstand $d = \frac{18}{3} = 6$

- b) \overline{PX} soll senkrecht auf g stehen:

$$\overline{PX} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -10+2t \\ -1-t \\ -4+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(-10+2t) - (-1-t) + 2(-4+2t) = 0 \Rightarrow t = 3$$

Der Abstand d ergibt sich aus dem Betrag von $\overline{PX} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \sqrt{16+16+4} = 6$

- c) Die Vektoren \overline{AP} , \overline{AX} und \overline{PX} bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse \overline{AP} .

$$\overline{AP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AP}^2 = 100 + 1 + 16 = 117$$

$$\overline{AX} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AX}^2 = 4t^2 + t^2 + 4t^2 = 9t^2$$

$$\begin{aligned} \overline{PX} = \begin{pmatrix} -10+2t \\ -1-t \\ -4+2t \end{pmatrix} &\Rightarrow \overline{PX}^2 = (-10+2t)^2 + (-1-t)^2 + (-4+2t)^2 \\ &= 4t^2 - 40t + 100 \\ &\quad t^2 + 2t + 1 \\ &\quad \underline{4t^2 - 16t + 16} \\ &= 9t^2 - 16t + 117 \end{aligned}$$

Der Satz des Pythagoras ergibt die Gleichung:

$$117 = 9t^2 + 9t^2 - 54t + 117 \Rightarrow 18t^2 - 54t = 18t(t-3) = 0$$

$$t_1 = 3, \quad t_2 = 0 \Rightarrow \text{für } t_1 = 3: \quad |\overline{PX}| = d = 6$$

d) Normalebene zu g durch P: $2x - y + 2z = 2$

Schnitt mit der Geraden g:

$$2(2t - 5) - (3 - t) + 2(2t - 6) - 2 = 0 \Rightarrow t = 3$$

Der Schnittpunkt ist $X(1|0|0) \Rightarrow \overline{PX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der Länge $\sqrt{16+16+4} = 6$

e) Es sei d die Länge von $\overline{PX} = \begin{pmatrix} 2t - 10 \\ -1 - t \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$

$$d^2 = |\overline{PX}|^2 = 9t^2 - 54t + 117 \quad (\text{siehe Aufgabe c})$$

$$d^{2'} = 18t - 54 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow d = 6 \quad (\text{siehe Aufgabe d})$$

vorher: $d^{2'}(2) < 0$ die Kurve fällt

nachher: $d^{2'}(4) > 0$ die Kurve steigt - es ist ein Minimum

Aufgabe 24

a) $P \in g: P(-2+3t|7-2t|6)$

$$Q \in h: Q(3-3s|10+4s|1+s) \Rightarrow \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 5-3s-3t \\ 5+4s+2t \\ -5+s \end{pmatrix}$$

\overline{PQ} muss senkrecht auf der Geraden h stehen:

$$\begin{pmatrix} 5-3s-3t \\ 3+4s+2t \\ -5+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -3(5-3s-3t) + 4(3+4s+2t) + (-5+s)$$

$$= -8 + 26s + 17t = 0 \Rightarrow s = \frac{8-17t}{26}$$

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 5-3 \cdot \frac{8-17t}{26} - 3t \\ 3+4 \cdot \frac{8-17t}{26} + 2t \\ -5 + \frac{8-17t}{26} \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 130-3(8-17t)-78t \\ 78+4(8-17t)+52t \\ -130+4(8-17t) \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 106-27t \\ 110-16t \\ -122-17t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 106-27t \\ 110-16t \\ -122-17t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} (106-27t)^2 = 11236 - 5724t + 729t^2 \\ (110-16t)^2 = 12100 - 3520t + 256t^2 \\ (-122-17t)^2 = 14884 + 4148t + 289t^2 \\ \hline 38220 - 5096t + 1274t^2 \end{array}$$

$$\overline{PQ}^2 = \frac{38220 - 5096t + 1274t^2}{26^2} = \frac{1470 - 196t + 49t^2}{26} \Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{26}} \sqrt{1470 - 196t + 49t^2}$$

b) Wir bilden die Ableitung des Quadrates von d:

$$d^{2'} = \frac{1}{26} (98t - 196) = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{1274}{26}} = \sqrt{49} = 7$$

vorher: $d^{2'}(1) < 0$ die Kurve fällt

nachher: $d^{2'}(3) > 0$ die Kurve steigt - es ist ein Minimum

$P(4|3|6)$

c) $d = \frac{1}{\sqrt{26}} \sqrt{1470 - 196t + 49t^2} = 7$ (Für $t = 2$)

d) Es ist: $P(4|3|6)$ und $-$ mit $s = \frac{8-17t}{26} = -13$ - $Q(6|6|0) \Rightarrow \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Winkel mit g: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 6 + 0 = 0$ rechtwinklig

Winkel mit h: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 + 12 - 6 = 0$ rechtwinklig

e) Die Ebenen werden durch die Richtungsvektoren der beiden Ebenen bestimmt.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $(-2|7|6)$ ergibt die eine Parallelebene: $2x + 3y - 6z = -19$

Einsetzen von $(3|10|1)$ ergibt die andere Parallelebene: $2x + 3y - 6z = 30$

Der Abstand der windschiefen Geraden ist gleich dem Abstand der beiden Parallelebenen und liesse sich beispielsweise aus dem Abstand des Punktes $(3|10|1)$ von der Ebene $2x + 3y - 6z = -19$ berechnen:

$$\text{HNF: } \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 10 - 6 \cdot 1 + 19}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{49}{7} = 7$$

Beachten Sie auch die Möglichkeit, den Abstand mit Hilfe des Spatprodukts zu berechnen:

Grundfläche: aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ergibt sich. $G = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

Das Spatvolumen ist: $V = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 10 + 9 + 30 = 49$

(Dabei ist: $\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Verbindungsvektor der Geraden.)

Es ergibt sich für d als Höhe des Spats: $d = \frac{V}{G} = \frac{49}{7} = 7$

Aufgabe 25

Vorbemerkung: Alle Ergebnisse in dieser Aufgabe sind gerundet. Wenn Sie auf die gleichen Schlussresultate kommen wollen, müssen Sie überall mit den gespeicherten genaueren Zahlen rechnen. Ein Excelblatt ist nützlich!

- a) Entspricht dem Abstand des Punktes A_1 vom Ursprung:

$$d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2} = 18.558 \text{ km}$$

- b) Winkel zwischen der Geraden und der xy -Ebene:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_2^2} \cdot 1 \cdot \cos \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin \left(\frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_2^2}} \right) = 3.18^\circ$$

- c) Schnitt der Geraden mit der xy -Ebene:

$$z = a_3 + t \cdot v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{a_3}{v_3} = \frac{1}{15} \text{ h} = 4 \text{ Min}$$

$$\text{Landepunkt: } \left(a_1 - \frac{a_3 v_1}{v_3} \mid a_2 - \frac{a_3 v_2}{v_3} \mid 0 \right) = (1 \mid 2 \mid 0)$$

d) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 270 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

e) Bremszeit: $t = \frac{v}{a} = 270 \frac{\text{km}}{\text{h}} : 1.875 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 75 \frac{\text{m}}{\text{sec}} : 1.875 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 40 \text{ sec}$

$$\text{Bremsweg: } s = \frac{1}{2} a t^2 = 1500 \text{ m}$$

- f) Es muss der kleinste Abstand der beiden windschiefen Geraden zur kritischen Zeit t berechnet werden:

Die Geschwindigkeit des Sportflugzeuges teilt sich auf in die Komponenten $\begin{pmatrix} -w \\ -w \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Dabei ist } w^2 + w^2 = 215^2 \Rightarrow w = \frac{215}{\sqrt{2}} \approx 152 \text{ km/h}$$

$$\begin{aligned} F_1(a_1 + v_1 t | a_2 + v_2 t | a_3) &= (-13.4 + 216t | 12.8 - 162t | 1 - 15t) \\ F_2(b_1 - wt | b_2 - wt | b_3) &= (2.5 - 152t | 12.4 - 152t | 0.4) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{F_2 F_1} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 t \\ c_2 + d_2 t \\ c_3 + d_3 t \end{pmatrix} \quad \text{mit: } \begin{array}{l} c_1 = a_1 - b_1 \\ c_2 = a_2 - b_2 \\ c_3 = a_3 - b_3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} d_1 = v_1 + w \\ d_2 = v_2 + w \\ d_3 = v_3 - 0 \end{array}$$

Das Quadrat der Entfernung ist nun: $d^2 = (c_1 + d_1 t)^2 + (c_2 + d_2 t)^2 + (c_3 + d_3 t)^2$

Ich leite hier unter Benützung der Kettenregel ab:

$$d^{2'} = 2d_1(c_1 + d_1 t) + 2d_2(c_2 + d_2 t) + 2d_3(c_3 + d_3 t) = 0 \quad | : 2$$

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) \cdot t = 0$$

$$t = -\frac{c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} \approx 0.0432 \text{ h}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} F_1(-4.070 | 5.802 | 0.352) \\ F_2(-4.067 | 5.833 | 0.4) \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{F_1 F_2} = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.031 \\ 0.048 \end{pmatrix} \Rightarrow d = 57 \text{ m}$$

- g) Gemeint ist damit der Abstand des Ursprungs von der Fluglinie des Sportflugzeuges:

Normalebene zur Flugbahn durch den Ursprung: $x + y = 0$

$$\text{Schnitt mit der Flugbahn: } (b_1 - wt) + (b_2 - wt) = 0 \Rightarrow t = \frac{b_1 + b_2}{2w} \approx 0.049$$

Daraus berechnet man den Schnittpunkt $S(b_1 - wt | b_2 - wt | b_3) = (-4.95 | 4.95 | 0.4)$

Der Abstand des Punktes ist dann 7.012 km