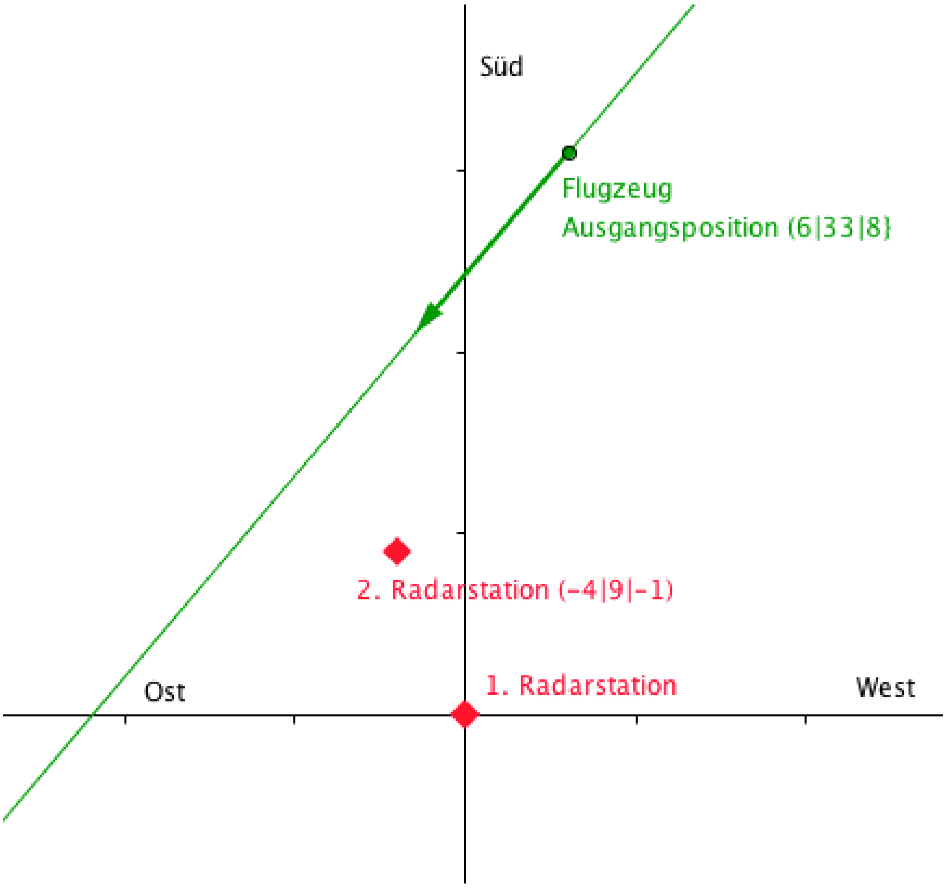
Aufgabe 26



a) Pro Minute legt der Flieger $\sqrt{81+144+0} = 15\,\text{km}$ zurück.
Das macht in der Stunde $60 \cdot 15\,\text{km} = 900\,\text{km}$.

Fluggeschwindigkeit: **900 km / h**

b) Flugbahn: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 33 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gesuchter nächster Punkt $P(6-9t \mid 33-12t \mid 8)$

Der Vektor $\overrightarrow{R_1P} = \begin{pmatrix} 6-9t \\ 33-12t \\ 8 \end{pmatrix}$ muss senkrecht zur Flugrichtung $\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein:

$$\begin{pmatrix} 6-9t \\ 33-12t \\ 8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = (6-9t)\cdot(-9) + (33-12t)\cdot(-12) = -450 + 225t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

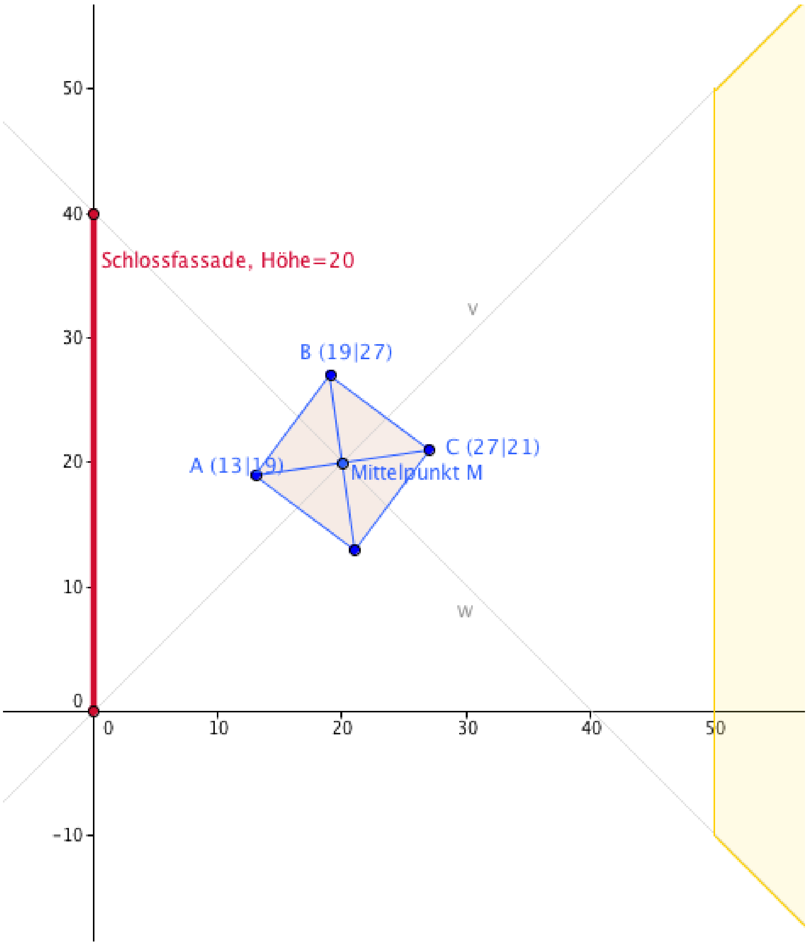
eingesetzt in $\overrightarrow{R_1P} = \begin{pmatrix} 6-9\cdot 2 \\ 33-12\cdot 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt die Distanz $\sqrt{144+81+0} = \mathbf{17\,km}$

c) Der Punkt $P(6-9t \mid 33-12t \mid 8)$ soll von den Radarstationen $R_1(0 \mid 0 \mid 0)$ und $R_2(-4 \mid 9 \mid -1)$ je den gleichen Abstand haben:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR_1}^2 &= \overrightarrow{PR_2}^2 \\ (6-9t)^2 + (33-12t)^2 + 64 &= (10-9t)^2 + (24-12t)^2 + 81 \\ 1189 - 900t + 225t^2 &= 757 - 756t + 225t^2 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Das ist nach **3 Minuten** der Fall

27



Grundriss

a) Aus Symmetriegründen muss der gesuchte Punkt S vertikal über dem Mittelpunkt liegen:

$$M\left(\tfrac{13+27}{2} \,\middle|\, \tfrac{19+21}{2}\right) = (20\,|\,20) \quad \Rightarrow \quad S(20\,|\,20\,|\,z)$$

Dieser Mittelpunkt muss von den Seitenflächen den Abstand z haben.

Gleichung der Ebene durch A, B und die Pyramidenspitze $E(20\,|\,20\,|\,12)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -36 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Ebene ABE: $48x - 36y - 25z = 48 \cdot 20 - 36 \cdot 20 - 25 \cdot 12 = -60$

Abstand S von dieser Ebene:

$$\frac{48 \cdot 20 - 36 \cdot 20 - 25 \cdot z + 60}{\sqrt{48^2 + 36^2 + 25^2}} = \frac{300 - 25z}{65} = z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z = \frac{10}{3}}$$

b) Der Projektionszentrum ist $P(x_0 \mid y_0 \mid 0)$

Der Strahl PE $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 20 - x_0 \\ 20 - y_0 \\ 12 \end{pmatrix}$

durchstösst die Ebene der Schlossfassade für $x = 0$

$$0 = x_0 + t \cdot (20 - x_0) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_0}{x_0 - 20}$$

Durchstosspunkt $P'\left(0 \,\middle|\, \frac{20(x_0 - y_0)}{x_0 - 20} \,\middle|\, \frac{12x_0}{x_0 - 20}\right)$

Daraus leiten sich folgende Ungleichungen ab:

1) $\frac{12x_0}{x_0 - 20} \le 20 \quad \Rightarrow \quad 12x_0 \le 20 \cdot (x_0 - 20) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{50 \le x_0}$

2) Gerade durch M und den Ursprung: $y = x$

und Gerade durch M und $(0 \mid 40)$: $y = -x + 40$

zusammengefasst: $\mathbf{-x + 40 \le y \le x}$ siehe Figur!

c)

$$\frac{20(x_0 - y_0)}{x_0 - 20} = \frac{20\left(\frac{x_0}{x_0} - \frac{y_0}{x_0}\right)}{\frac{x_0}{x_0} - \frac{20}{x_0}} = \frac{20\left(1 - \frac{y_0}{x_0}\right)}{1 - \frac{20}{x_0}} \rightarrow \frac{20(1-0)}{1-0} = 20 \quad \text{für } x_0 \rightarrow \infty$$

$$\frac{12x_0}{x_0 - 20} = \frac{\frac{12x_0}{x_0}}{\frac{x_0}{x_0} - \frac{20}{x_0}} = \frac{12}{1 - \frac{20}{x_0}} \rightarrow 12 \quad \text{für } x_0 \rightarrow \infty$$

$\mathbf{(0 \mid 20 \mid 12)}$

d) Durchstosspunkte mit der Schlossfassade

der Geraden PE $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$

$x = 63 + 43\,t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{63}{43} \quad \Rightarrow \quad E'(0\,|\,16.744\,|\,17.581)$

der Geraden PB $y = 27 \quad \Rightarrow \quad B'(0\,|\,27\,|\,0)$

der Geraden PD $D(21\,|\,13) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + 6 \quad \Rightarrow \quad D'(0\,|\,6\,|\,0)$

Fläche des Dreiecks: $\frac{21 \cdot 17.581}{2} = 184.605$

Fläche der :Fassade: $40 \cdot 20 = 800$

$\frac{184.605}{800} = 0.2308 = \mathbf{23.08\,\%}$