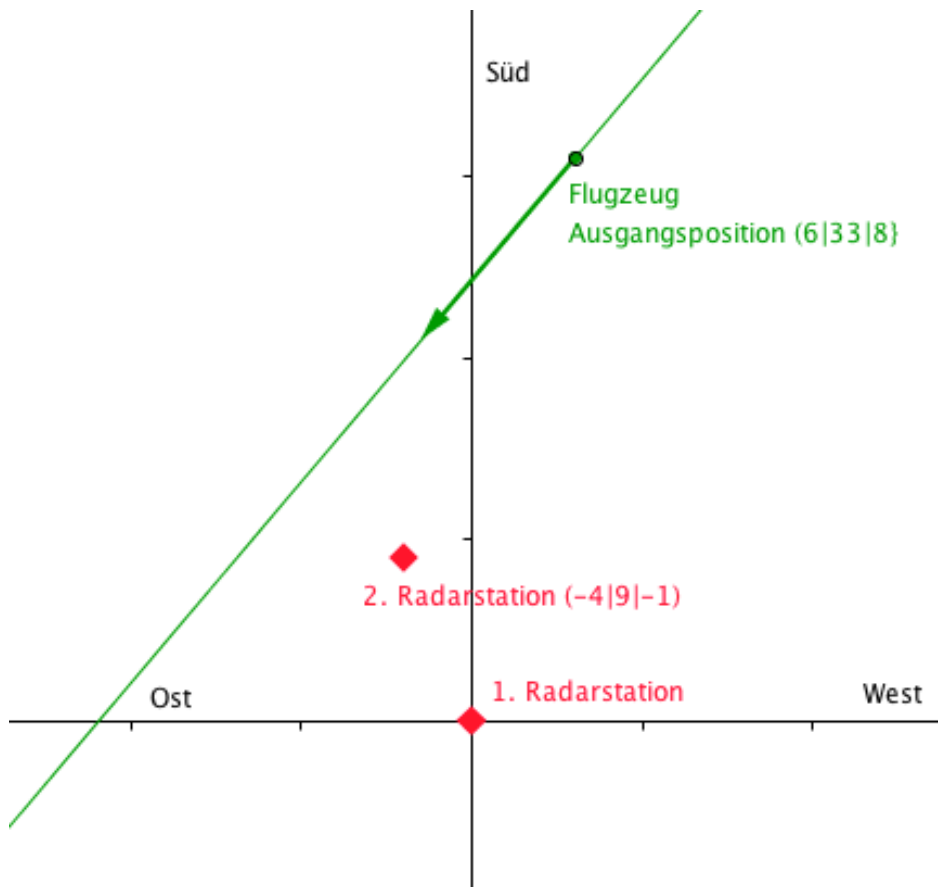


Aufgabe 26



- a) Pro Minute legt der Flieger $\sqrt{81+144+0} = 15\text{ km}$ zurück.
Das macht in der Stunde $60 \cdot 15\text{ km} = 900\text{ km}$.

Fluggeschwindigkeit: **900 km/h**

b) Flugbahn:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 33 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Gesuchter nächster Punkt $P(6 - 9t \mid 33 - 12t \mid 8)$

Der Vektor $\overrightarrow{R_1P} = \begin{pmatrix} 6 - 9t \\ 33 - 12t \\ 8 \end{pmatrix}$ muss senkrecht zur Flugrichtung $\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein:

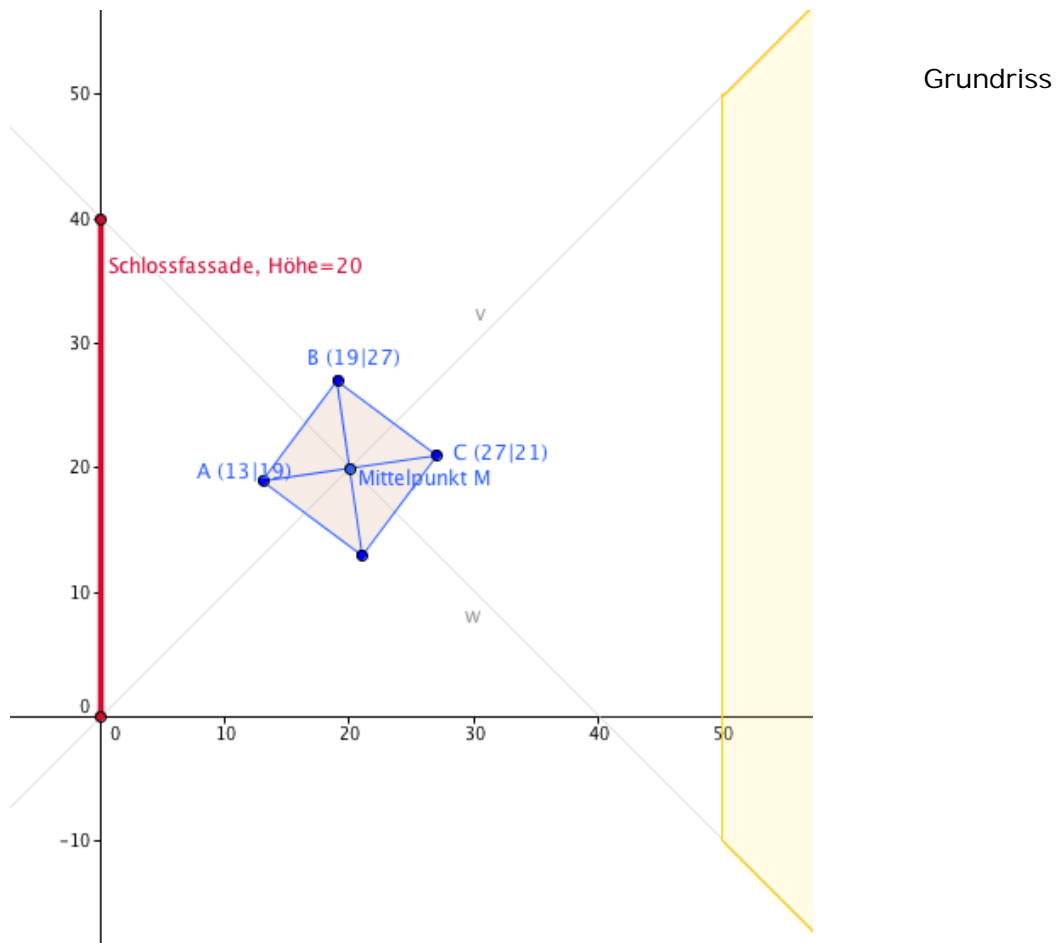
$$\begin{pmatrix} 6 - 9t \\ 33 - 12t \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = (6 - 9t) \cdot (-9) + (33 - 12t) \cdot (-12) = -450 + 225t = 0 \Rightarrow t = 2$$

eingesetzt in $\overrightarrow{R_1P} = \begin{pmatrix} 6 - 9 \cdot 2 \\ 33 - 12 \cdot 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt die Distanz $\sqrt{144 + 81 + 0} = \mathbf{17 \text{ km}}$

c) Der Punkt $P(6 - 9t \mid 33 - 12t \mid 8)$ soll von den Radarstationen $R_1(0 \mid 0 \mid 0)$ und $R_2(-4 \mid 9 \mid -1)$ je den gleichen Abstand haben:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR_1}^2 &= \overrightarrow{PR_2}^2 \\ (6 - 9t)^2 + (33 - 12t)^2 + 64 &= (10 - 9t)^2 + (24 - 12t)^2 + 81 \\ 1189 - 900t + 225t^2 &= 757 - 756t + 225t^2 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Das ist nach **3 Minuten** der Fall



- a) Aus Symmetriegründen muss der gesuchte Punkt S vertikal über dem Mittelpunkt liegen:

$$M\left(\frac{13+27}{2} \mid \frac{19+21}{2}\right) = (20 \mid 20) \Rightarrow S(20 \mid 20 \mid z)$$

Dieser Mittelpunkt muss von den Seitenflächen den Abstand z haben.

Gleichung der Ebene durch A, B und die Pyramidenspitze E(20|20|12) :

$$\overline{AB} \times \overline{AE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -36 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebene ABE: } 48x - 36y - 25z = 48 \cdot 20 - 36 \cdot 20 - 25 \cdot 12 = -60$$

Abstand S von dieser Ebene:

$$\frac{48 \cdot 20 - 36 \cdot 20 - 25 \cdot z + 60}{\sqrt{48^2 + 36^2 + 25^2}} = \frac{300 - 25z}{65} = z \Rightarrow z = \frac{10}{3}$$

b) Der Projektionszentrum ist $P(x_0 | y_0 | 0)$

$$\text{Der Strahl PE } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 20 - x_0 \\ 20 - y_0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

durchstösst die Ebene der Schlossfassade für $x = 0$

$$0 = x_0 + t \cdot (20 - x_0) \Rightarrow t = \frac{x_0}{x_0 - 20}$$

$$\text{Durchstosspunkt } P' \left(0 \mid \frac{20(x_0 - y_0)}{x_0 - 20} \mid \frac{12x_0}{x_0 - 20} \right)$$

Daraus leiten sich folgende Ungleichungen ab:

$$1) \quad \frac{12x_0}{x_0 - 20} \leq 20 \Rightarrow 12x_0 \leq 20 \cdot (x_0 - 20) \Rightarrow \mathbf{50 \leq x_0}$$

2) Gerade durch M und den Ursprung: $y = x$

und Gerade durch M und $(0 | 40)$: $y = -x + 40$

zusammengefasst: $\mathbf{-x + 40 \leq y \leq x}$ siehe Figur!

$$c) \quad \frac{20(x_0 - y_0)}{x_0 - 20} = \frac{20\left(\frac{x_0}{x_0} - \frac{y_0}{x_0}\right)}{\frac{x_0 - 20}{x_0}} = \frac{20\left(1 - \frac{y_0}{x_0}\right)}{1 - \frac{20}{x_0}} \rightarrow \frac{20(1 - 0)}{1 - 0} = 20 \quad \text{für } x_0 \rightarrow \infty$$

$$\frac{12x_0}{x_0 - 20} = \frac{\frac{12x_0}{x_0}}{\frac{x_0 - 20}{x_0}} = \frac{12}{1 - \frac{20}{x_0}} \rightarrow 12 \quad \text{für } x_0 \rightarrow \infty$$

$\mathbf{(0 | 20 | 12)}$

d) Durchstosspunkte mit der Schlossfassade

$$\text{der Geraden PE} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$x = 63 + 43t = 0 \Rightarrow t = -\frac{63}{43} \Rightarrow E'(0 | 16.744 | 17.581)$$

$$\text{der Geraden PB} \quad y = 27 \Rightarrow B'(0 | 27 | 0)$$

$$\text{der Geraden PD} \quad D(21 | 13) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 6 \Rightarrow D'(0 | 6 | 0)$$

$$\text{Fläche des Dreiecks: } \frac{21 \cdot 17.581}{2} = 184.605$$

$$\text{Fläche der :Fassade: } 40 \cdot 20 = 800$$

$$\frac{184.605}{800} = 0.2308 = \mathbf{23.08\%}$$