

Aufgabe 6

Vorerst sind die Mittelpunkte als Schnittpunkte der Ebenen mit der Geraden zu berechnen:

$$g \cap E: \quad (11t) + 2(10t) - 2(6 + 2t) + 12 = 0 \\ 27t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow M_E(0|0|6)$$

$$g \cap F: \quad (11t) + 2(10t) - 2(6 + 2t) - 42 = 0 \\ 27t - 54 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow M_F(22|20|10)$$

- a) Die Mantellinien sind parallel zur Achse $\overline{M_E M_F} = \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 11 + 20 - 4 = 27 = 15 \cdot 3 \cdot \sin \gamma \Rightarrow \gamma = 36.87^\circ$$

- b) Die Grundfläche ist: $G = 20\pi$

Die Höhe entspricht dem Abstand des Punktes M_E von der Ebene F:

$$h = \left| \frac{0 + 0 - 2 \cdot 6 - 42}{3} \right| = 18$$

Damit erhalten wir das Volumen $V = G \cdot h = 20\pi \cdot 18 = 360\pi$

- c) Parallel zur xy-Ebene heisst: senkrecht zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

In der Ebene E (bzw. im Grundkreis) liegend heisst: senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Richtung des Durchmessers ist: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{5}$.

Da $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ erhalten wir von M_E aus die gesuchten Punkte mit $\pm 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$P_1(4|-2|6)$, $P_2(-4|2|6)$

Aufgabe 7

a) Neigungswinkel: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 = 1 \cdot 3 \cdot \sin \gamma \Rightarrow \gamma = 41.9^\circ$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor der Ebene, der M mit g verbindet.

Der Normalenvektor der Ebene $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ liegt parallel zur xz-Ebene und rechtwinklig zur y-Achse. Eine Ebene mit diesem Normalenvektor muss also parallel zur y-Achse verlaufen.

c) Ebene durch M senkrecht zu g: $2x - y + 2z = 4 - 4 + 2 = 2$

A ist der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Geraden g:

$$2(-5+2t) - (3-t) + 2(-6+2t) - 2 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow A(1|0|0)$$

$$\overline{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C(2+1|4+4|1+1) = C(3|8|2)$$

Der Vektor \overline{MB} liegt in $2x - y + 2z - 2 = 0$ und steht senkrecht auf \overline{AM} :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

\overline{AM} hat die Länge $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ hat die Länge $9\sqrt{2}$,

also ist $\overline{MB} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $B(2+3|4+0|1-3) = B(5|4|-2)$

$$\overline{MD} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } D(2-3|4+0|1+3) = D(-1|4|4)$$

Aufgabe 8

- a) S liegt auf der Geraden g: $S(t|1+t|4-t)$

Der Winkel zwischen AB und AS soll 45° sein:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t+2 \\ t-1 \\ 4-t \end{pmatrix} = t+2 - 2(t-1) + 2(4-t) = 3 \cdot \sqrt{(t+1)^2 + (t-1)^2 + (4-t)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$12 - 3t = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3t^2 - 6t + 21} \quad \left| \cdot \frac{2}{3} \right.$$

$$8 - 2t = \sqrt{2(3t^2 - 6t + 21)}$$

$$64 - 32t + 4t^2 = 6t^2 - 12t + 42$$

$$0 = 2t^2 + 20t - 22$$

$$0 = t^2 + 10t - 11 = (t+11)(t-1) \Rightarrow S_1(-11|-10|15), S_2(1|2|3)$$

- b) Ebene ABC und Grundfläche:

$$\overline{CA} \times \overline{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow G = \frac{\sqrt{16+16+4}}{2} = 3, \text{ Ebene ABC: } 2x + 2y + z = 0$$

$$V = \frac{G \cdot h}{3} \Rightarrow h = \frac{3V}{G} = \frac{15}{3} = 5$$

Abstand des Punktes $S(t|1+t|4-t)$ von der Ebene ABC

$$\frac{2(t) + 2(1+t) + (4-t)}{3} = \pm 5 \Rightarrow \frac{3t+6}{3} = \pm 5 \Rightarrow t+2 = \pm 5$$

$$t_3 = 3 \Rightarrow S_3(3|4|1)$$

$$t_4 = -7 \Rightarrow S_4(-7|-6|11)$$

Das Volumen liesse sich auch mit dem Spatprodukt ausrechnen.

- c) $\overline{AS}^2 = (t+2)^2 + (t-1)^2 + (4-t)^2 = 3t^2 - 6t + 21 \Rightarrow \overline{AS}^2 = \overline{CS}^2 + 4 \quad \text{q.e.d.}$
 $\overline{CS}^2 = (t)^2 + (t+1)^2 + (4-t)^2 = 3t^2 - 6t + 17$

Aufgabe 9

Gleichung der Geraden g:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) $\overline{PA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \\ -9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_{yz\text{-Ebene}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 = 9 \cdot 1 \cdot \cos \gamma \Rightarrow \gamma = 27.27^\circ$$

b) Ebenen senkrecht zu g haben die Gleichung $4x - 7y + 4z + c = 0$

A soll den Abstand 1 haben: $\frac{4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + c}{9} = \pm 1 \Leftrightarrow 17 + c = \pm 9$

$$c_1 = -8 \Rightarrow E_1: 4x - 7y + 4z - 8 = 0$$

$$c_2 = -26 \Rightarrow E_2: 4x - 7y + 4z - 26 = 0$$

c) Der Mittelpunkt M des Quadrates ist der Schnittpunkt von g mit der zu g normalen Ebene durch A mit der Gleichung: $4x - 7y + 4z = 17$:

$$4(5 + 4t) - 7(-2 - 7t) + 4(16 + 4t) = 17 \Rightarrow 81t = -81 \Rightarrow t = -1 \text{ und } M(1|5|12)$$

$$\overline{AM} = \overline{MC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow C(1 - 1|5 + 4|12 + 8) = C(0|9|20)$$

\overline{AM} hat die Länge 9, der Richtungsvektor von g ebenfalls;

$$B(1 + 4|5 - 7|12 + 4) = B(5|-2|16)$$

$$C(1 - 4|5 + 7|12 - 4) = C(-3|12|8)$$

Aufgabe 10

$$a) \quad \overline{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 32 - 64 + 32 = 0$$

BA und BC stehen rechtwinklig aufeinander und haben je die Länge 9.
Das Viereck ABCD muss, wenn die Pyramiden gerade sein sollen, ein Quadrat sein.

b) Der Höhenfusspunkt ist der Mittelpunkt des Quadrates, bzw. der Strecke AC: $M(7|1|7)$

$$\text{Gleichung der Ebene ABC: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 48 \\ -96 \end{pmatrix}$$

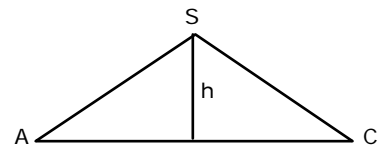
Dieser Vektor hat die Länge 144; es gilt also:

$$\overline{MS} = \pm \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 96 \\ 48 \\ -96 \end{pmatrix} c = \pm \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} S_1 (7+4|1+2|7-4) = S_1 (11|3|3) \\ S_2 (7-4|1-2|7+4) = S_2 (3|-1|11) \end{matrix}$$

$$c) \quad V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{12^2 \cdot 6}{3} = 288$$

d) Der Umkugelradius einer dieser Pyramiden ist gleich dem Umkreisradius des Dreiecks ACS_1 :

AC ist die Quadratdiagonale mit der Länge $9\sqrt{2}$



Die Fläche dieses Dreiecks ist: $A = \frac{9\sqrt{2} \cdot 6}{2} = 27\sqrt{2}$

$\overline{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; die Länge der Seitenkanten ist $6\sqrt{3}$

Für den Umkreisradius des Dreiecks gibt es eine Formel: $r = \frac{abc}{4A} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{4 \cdot 27\sqrt{2}} = 9$