

Aufgabe 16

Kollinear heisst parallel, der eine Vektor ist ein Vielfaches des andern.

C liegt in der xy-Ebene: $C(x|y|0)$

$$\overline{AC} = k \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 3$$

$$\overline{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C(7|5|0)$$

Aufgabe 17

$$\text{Seitenvektoren berechnen: } \overline{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Seitenlängen:

$$c = \sqrt{64+1+16} = 9, \quad b = \sqrt{16+9+0} = 5, \quad a = \sqrt{16+4+16} = 6 \Rightarrow u = 20$$

Aufgabe 18

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -19 \end{pmatrix} \quad \overline{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \overline{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overline{BD} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{450} \quad AC = \sqrt{450} \quad AD = \sqrt{450} \quad BC = \sqrt{450} \quad CD = \sqrt{450} \quad BD = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$$

Aufgabe 19

Der Vektor \vec{a} hat die Länge $17.5 = \frac{35}{2}$

Wird er mit $\pm \frac{2}{5} = \pm 0.4$ erhält er die Länge 7. Die gesuchten Vektoren: $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 20

Punkt auf der x-Achse: $P(x|0|0) \Rightarrow \overline{AP} = \begin{pmatrix} x+3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overline{BP} = \begin{pmatrix} x \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= 2 \cdot |\overline{BP}| \\ |\overline{AP}|^2 &= 4 \cdot |\overline{BP}|^2 \\ (x+3)^2 + 144 + 36 &= 4 \cdot (x^2 + 36 + 9) \\ 0 &= 3x^2 - 6x - 9 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 3, & x_2 &= -1 \\ P_1 &(3|0|0), & P_2 &(-1|0|0) \end{aligned}$$

Aufgabe 21

Sei $M(u|v|w)$; dann gilt: $\overline{AM} = \begin{pmatrix} u-1 \\ v \\ w+1 \end{pmatrix}$, $\overline{BM} = \begin{pmatrix} u \\ v+2 \\ w-4 \end{pmatrix}$, $\overline{CM} = \begin{pmatrix} u-3 \\ v-2 \\ w-3 \end{pmatrix}$, $\overline{DM} = \begin{pmatrix} u-3 \\ v-1 \\ w-4 \end{pmatrix}$

M hat von allen vier Punkten denselben Abstand: $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{CM} = \overline{DM}$

Nach Quadrieren ergibt sich das Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} (u-1)^2 + v^2 + (w+1)^2 = u^2 + (v+2)^2 + (w-4)^2 \\ u^2 + (v+2)^2 + (w-4)^2 = (u-3)^2 + (v-2)^2 + (w-3)^2 \\ (u-3)^2 + (v-2)^2 + (w-3)^2 = (u-3)^2 + (v-1)^2 + (w-4)^2 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} 2u + 4v - 10w + 18 = 0 \\ -6u - 8v + 2w + 2 = 0 \\ +2v - 2w + 4 = 0 \end{array} \right| \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 4v - 28w + 56 = 0 \\ 2v - 2w + 4 = 0 \end{array} \right| \end{aligned}$$

Es ergeben sich die Lösungen: $u = 1$, $v = 0$, $w = 2 \Rightarrow M(1|0|2)$

Der Radius kann aus der Länge vom \overline{AM} berechnet werden: $\overline{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 3$

Aufgabe 22

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overline{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overline{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = -2\overline{CD} \Rightarrow AB \parallel CD : \text{Trapez}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 = \sqrt{18} : \text{gleichschenkelig.}$$