

Aufgabe 23

$$a) \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \overline{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = 5\overline{DC}, \quad AB \parallel DC$$

$$b) \quad \text{Länge von DC} = c = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\text{Länge von AB} = a = 5 \cdot c = 15$$

$$\text{Mittellinie } m = \frac{3+15}{2} = 9$$

$$c) \quad \overline{AE} = \overline{DC} \Rightarrow \overline{OE} = \overline{OA} + \overline{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E(3|0|3)$$

Aufgabe 24

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{OT} = \overline{OA} + \overline{AT} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow T(3|4|3)$$

Aufgabe 25

Idee: wir verlängern die Seiten AB und AC so, dass sie gleich lang werden. Nun lässt sich das Dreieck AB'C' zu einem Rhombus ergänzen. Die Diagonale AD ist auch Winkelhalbierende.

$$\text{Seitenlängen von: } \overline{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}: \quad AB = 7, \quad AC = 9$$

$$\text{Dann sind } 9\overline{AB} = \begin{pmatrix} 54 \\ 27 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ und } 7\overline{AC} = \begin{pmatrix} -56 \\ -7 \\ 28 \end{pmatrix} \text{ gleich lang } \Rightarrow \overline{AD} = \begin{pmatrix} 54 \\ 27 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -56 \\ -7 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Jedes Vielfache davon hat die Richtung der Winkelhalbierenden, z. B. auch $\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix}$

Aufgabe 26

Ein Punkt in der xy -Ebene hat die Koordinaten $P(x|y|0)$

$$\text{Dann ist: } \overline{AP} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{BP} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{CP} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und es muss gelten: $AP^2 = BP^2$ und $AP^2 = CP^2$, was das folgende Gleichungssystem ergibt:

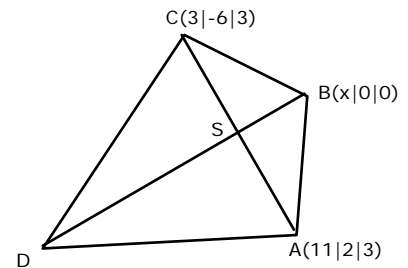
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 + 0 = (x+2)^2 + (y-2)^2 + 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + 0 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 6 = 0 \\ -6x + \quad + 12 = 0 \end{cases}$$

Die Lösungen sind: $x = 2$, $y = 5$ und $P(2|5|0)$

Aufgabe 27

$$\text{a) } \overline{AB} = \begin{pmatrix} x-11 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overline{CB} = \begin{pmatrix} x-3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\overline{AB}| = |\overline{CB}|$$

$$\begin{aligned} (x-11)^2 + 4 + 9 &= (x-3)^2 + 36 + 9 \\ 16x &= 80 & \Rightarrow & x = 5 \text{ und } B(5|0|0) \end{aligned}$$



S ist der Mittelpunkt der Strecke AC: $S(7|-2|3)$

$$\overline{BS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{BD} = 3\overline{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow D(11|-6|9)$$

$$\text{b) } f = |\overline{BD}| = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$$

$$e = |\overline{AC}| = \sqrt{64 + 64 + 0} = 8\sqrt{2}, \quad \text{und damit ist die Fläche: } I = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2}8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{17} = 12\sqrt{34}$$

Aufgabe 28

$$\text{Der Strahl hat die Richtung } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P(t|t|t) \quad \text{und damit ist } \overline{MP} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t-3 \\ t-7 \end{pmatrix}$$

MP muss die Länge $\sqrt{14}$ haben:

$$\begin{aligned} (t-2)^2 + (t-3)^2 + (t-7)^2 &= 14 \\ 3t^2 - 18t + 15 &= 0 \\ t^2 - 6t + 5 &= 0 \\ (t-5)(t-1) &= 0 \Rightarrow P_1(5|5|5), \quad P_2(1|1|1) \end{aligned}$$