

Aufgabe 33

Das Skalarprodukt muss 0 sein:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} x+1 \\ 2-2x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \\ x(x+1) + 4(2-2x) + 2 &= 0 \\ x^2 - 7x + 10 &= (x-5)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 34

$$\text{zu } e_1: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 = 3 \cdot 1 \cdot \cos \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 48.2^\circ$$

$$\text{zu } e_2: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 = 3 \cdot 1 \cdot \cos \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 109.5^\circ$$

$$\text{zu } e_3: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 = 3 \cdot 1 \cdot \cos \alpha_3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 131.8^\circ$$

Aufgabe 35

Um jeweils den Innenwinkel erhalten müssen Sie darauf achten, dass die beiden Vektoren von gleichen Punkt aus gehen.

$$\alpha: \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -48 - 3 + 8 = -43 = 7 \cdot 9 \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 133.04^\circ$$

$$\beta: \quad \overline{BC} \cdot \overline{BA} = \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 84 + 12 - 4 = 92 = \sqrt{216} \cdot 7 \cdot \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 26.59^\circ$$

$$\gamma: \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 20.37^\circ$$

(oder als Übung oder zur Kontrolle auch mit dem Skalarprodukt)

Aufgabe 36

$$\overline{DA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{DA} = \overline{CB} \quad \text{das Viereck ist ein Parallelogramm.}$$

$$\overline{CD} \cdot \overline{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 18 - 16 - 2 = 0 \quad \text{das Parallelogramm ist ein Rechteck.}$$

Aufgabe 37

Irgendein Punkt auf der x-Achse hat die Koordinaten: $P(x|0|0)$, dann muss gelten:

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \begin{pmatrix} x-2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (x-2)(x-6) - 3 - 2 = 0$$
$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 7 &= 0 \\ (x-7)(x-1) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 1$$

$P_1(7|0|0)$ und $P_2(1|0|0)$

Aufgabe 38

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overline{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{54} \quad AC = \sqrt{44} \quad AD = \sqrt{66}$$

a) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 18 - 12 - 6 = 0, \quad \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 3 - 24 + 21 = 0, \quad \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 6 + 8 - 14 = 0$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{44}}{2} \cdot \sqrt{66} = \frac{\sqrt{54 \cdot 44 \cdot 66}}{6} = 66$

Aufgabe 39

$$\begin{pmatrix} x \\ 8 \\ \sqrt{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + 64 + 11} \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x = \sqrt{x^2 + 75} \cdot \frac{1}{2}$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 75}$$

$$4x^2 = x^2 + 75$$

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = 25$$

$$\Rightarrow x_1 = 5, \quad (x_2 = -5 \text{ falsch für die Wurzelgleichung})$$

Aufgabe 40

Für die Koordinaten von B gilt: B(0|y|0)

Gleichschönig: $\overline{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ y-4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overline{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ müssen gleich lang sein:

$$4 + (y-4)^2 + 9 = 36 + 9 + 4$$

$$(y-4)^2 = 36$$

$$y-4 = \pm 6$$

$$y = 4 \pm 6$$

$$B_1(0|10|0) \quad \overline{AC} \cdot \overline{AB_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = 73 = 7 \cdot \sqrt{146} \cdot \cos \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 30.3^\circ$$

$$B_2(0|-2|0) \quad \overline{AC} \cdot \overline{AB_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 37 = 7 \cdot \sqrt{74} \cdot \cos \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 52.1^\circ$$

Aufgabe 41

$$a) \quad C(x|0|0) \quad \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -x + 4 + 4 = 0 \Rightarrow x = 8, \quad C(8|0|0)$$

$$\overline{OA} + \overline{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(7|-2|-2)$$

$$b) \quad l = |\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}| = 3 \cdot \sqrt{64 + 4 + 4} = 3\sqrt{72} = 18\sqrt{2}$$

Aufgabe 42

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overline{EH} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overline{HG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{EF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es ist: $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{HG} = \overline{EF}$ und $\overline{AD} = \overline{EH}$

Der Körper ist ein Spat

Es ist: $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \overline{AE} = 0$

Der Spat ist ein Quader

Es ist: $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = |\overline{AE}| = 3$

Der Quader ist ein Würfel

Aufgabe 43

Der Körper ist ein Spat:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{EF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{HG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} = \overline{EF} = \overline{HG}$$

Der Spat ist ein Quader:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0$$

Der Quader ist ein Würfel:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$|\overline{AE}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

Es folgen drei eher theoretische Aufgaben:

Aufgabe 44

Einerseits: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Andrerseits: $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 5 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 25$

Aufgabe 45

a) Kollineare (parallele) Vektoren, die die gleiche Richtung haben.

Der Zwischenwinkel ist 0° , $\cos 0^\circ = 1$

b) Kollineare (parallele) Vektoren, die gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

Der Zwischenwinkel ist 0° oder 180° , $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 180^\circ = -1 \Rightarrow |\cos 180^\circ| = 1$

Aufgabe 46

Sei: $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{v}| = v$, dann ist $v = b \cos \varepsilon$

$\frac{\vec{a}}{a}$ ist ein Einheitsvektor in Richtung \vec{a}

damit gilt: $\vec{v} = b \cos \varepsilon \cdot \frac{\vec{a}}{a} = \frac{b \cos \varepsilon}{a} \cdot \vec{a} = \frac{ab \cos \varepsilon}{a \cdot a} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$

b) Bei einem stumpfwinkligen Dreieck ist $v = b \cos \varepsilon$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ negativ;
 \vec{v} wird die entgegengesetzte Richtung zu \vec{a} haben.