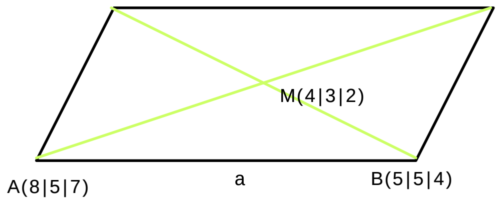
Aufgabe 47

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -(x-4) \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4-x \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = 1+(4-x)^2+4 = 9 \quad\Rightarrow\quad x^2-8x+12 = (x-6)(x-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{matrix}$$

Aufgabe 48



Der Mittelpunkt ist der Schnitt der Diagonalen.
Diese teilen das Dreieck in vier flächengleiche Stücke.

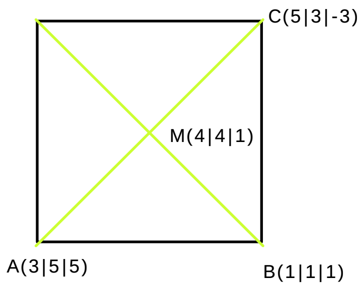
a) $$\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$F = 4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{36+9+36} = 4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 9 = 18$$

b) $$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt{9+9}$$

$$a\cdot h_a = F \quad\Rightarrow\quad h_a = \frac{F}{a} = \frac{18}{\sqrt{18}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Aufgabe 49



Die Höhe steht senkrecht auf der Quadratfläche,

sie hat die Richtung $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

dieser Vektor hat die Länge $12\cdot 3 = 36$.

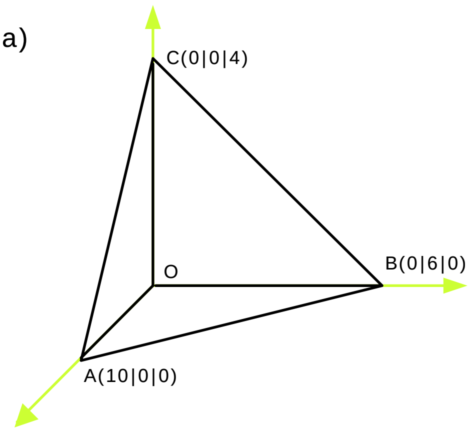
Für den Höhenvektor gilt: $\vec{h} = \pm\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Mittelpunkt des Quadrates bzw. der Diagonalen AC $M(4|4|1)$ wird um $\vec{h}$ verschoben:

$$S_1\,(4+6|4-6|1+3) = S_1\,(10|-2|4)$$
$$S_2\,(4-6|4+6|1-3) = S_2\,(-2|10|-2)$$

Aufgabe 50

a)



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Die Oberfläche setzt sich aus vier Dreiecksflächen zusammen:

$$F_{ABC} = \tfrac{1}{2}\sqrt{24^2 + 40^2 + 60^2} = 38$$
$$F_{OAB} = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 30$$
$$F_{OBC} = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$
$$F_{OCA} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20$$

b) Das Volumen des Tetraeders lässt sich auf verschiedene Arten berechnen:

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} \cdot F_{OAB} \cdot 4 = \tfrac{1}{3} \cdot 30 \cdot 4 = 40 \\ V &= \tfrac{1}{3} \cdot F_{ABC} \cdot h = \tfrac{1}{3} \cdot 38 \cdot h \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{40}{\tfrac{1}{3} \cdot 38} = \frac{60}{19}$$

Aufgabe 51

$P(x|0|0)$ ist ein Punkt auf der x-Achse.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 + 40 \\ -(-8 - 4x) \\ -20 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4x + 8 \\ -4x - 20 \end{pmatrix}$$

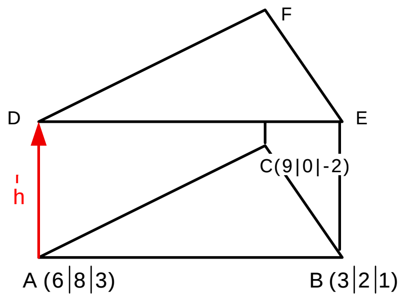
Es ist: $\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} \right|^2 = (2 \cdot 18)^2$

$$\begin{aligned} 576 + (16x^2 + 64x + 64) + (16x^2 + 160x + 400) &= 1296 \\ 32x^2 + 224x - 256 &= 0 \\ x^2 + 7x - 8 &= 0 \\ (x+8)(x-1) &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(-8|0|0),\ P_2(1|0|0) \end{aligned}$$

Aufgabe 52

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -21 \\ 42 \end{pmatrix} = \vec{g}$$

$\vec{g}$ hat den Betrag und die Länge 49.
Die Grundfläche ABC hat den Inhalt 24.5

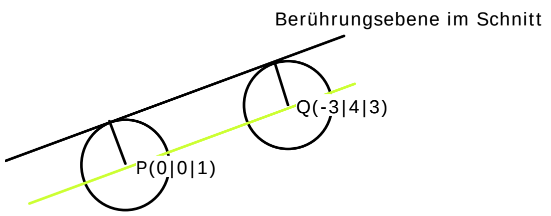


Daraus berechnet sich die Länge der Höhe: $V = 24.5 \cdot h = 343 \quad \Rightarrow \quad h = 14$.

$$\vec{h} = \pm \tfrac{14}{49}\vec{g} = \pm \tfrac{2}{7}\vec{g} = \pm \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$D(6 \pm 4 \mid 8 \mp 6 \mid 3 \pm 12)$	$D_1(10 \mid 2 \mid 15)$	$D_2(2 \mid 14 \mid -9)$
$E(3 \pm 4 \mid 2 \mp 6 \mid 1 \pm 12)$	$E_1(7 \mid -4 \mid 13)$	$E_2(-1 \mid 8 \mid -11)$
$F(9 \pm 4 \mid 0 \mp 6 \mid -2 \pm 12)$	$F_1(13 \mid -6 \mid 10)$	$F_2(5 \mid 6 \mid -14)$

Aufgabe 53



Schnitt durch P, Q und die Berührungspunkte der beiden Kugeln. Die dritte Kugel müsste man sich weiter hinten oder vorn vorstellen.
Die Berührungsebene kann auch auf der andern Seite der Kugel liegen.

a) Die Berührungsebene ist parallel zur Ebene PQR und die Berührungsradien stehen senkrecht zu ihr.

Richtung des Berührungsradius: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ -11 \end{pmatrix} \quad // \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Dieser Vektor hat gerade die Länge 3.

Für die Berührungspunkte B gilt:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_1(2 \mid 2 \mid 0),\ \ B_2(-2 \mid -2 \mid 2)$$

b) Das Dreieck der Berührungspunkte hat den gleichen Inhalt wie das Dreieck PQR:

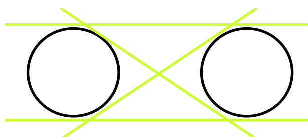
$$I = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{22^2 + 22^2 + 11^2} = \tfrac{1}{2} \cdot 33 = 16.5$$

c) Es gibt acht Berührungsebenen; nennen Wir die Kugeln P, Q und R:

P, Q, R "oberhalb" der Ebene
P, Q, R "unterhalb" der Ebene

P, Q "oben", R "unten"	P, R "oben", Q "unten"	R, Q "oben", P "unten"
P, Q "unten", R "oben"	P, R "unten", Q "oben"	R, Q "unten", P "oben"

Mit nur zwei Kugeln sähe das im Schnitt so aus:



| |