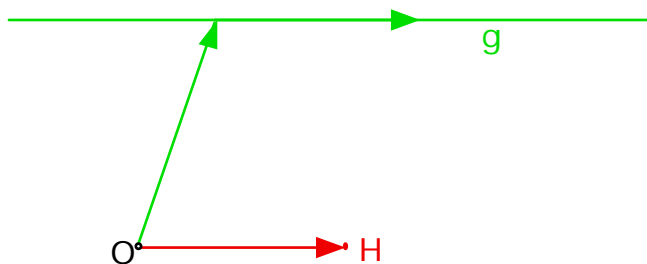


Aufgabe 65

- a) $t = 1$ zeigt, dass die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben. Da \vec{u} und \vec{v} nicht parallel sind, handelt es sich um zwei sich schneidende Geraden.
- b) Die Geraden haben gleiche Richtungsvektoren. Da der Verbindungsvektor $(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = \vec{v}$ auch parallel ist sind die Geraden identisch.
- c) Auch diese Geraden haben gleiche Richtungsvektoren. Da $\vec{u} - \vec{v}$ nicht parallel zu $\vec{u} \times \vec{v}$ ist, sind die Geraden echt parallel.
- d) Die zweite Gerade steht senkrecht zur ersten.



Die zweite Gerade h steht senkrecht auf der Ebene $\vec{u}\vec{v}$ und geht durch den Punkt H.

Aufgabe 66

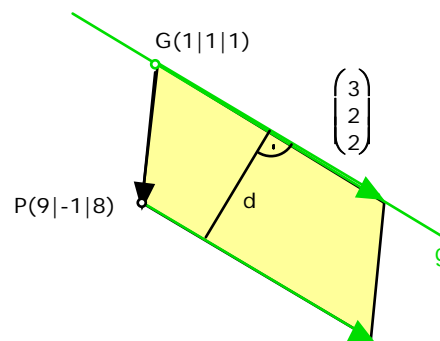
1. Art

Empfehlenswert, wenn nur der Abstand gesucht wird.

Figur gemäss Zeichnung erstellen!

$$\vec{GP} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GP} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix}$$



Fläche des Parallelogramms: $F = \sqrt{18^2 + 25 + 22^2} = \sqrt{833}$

Grundlinie des Parallelogramms: $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$

Der Abstand ist gleich der Höhe des Parallelogramms: $d = \frac{F}{g} = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = \sqrt{49} = 7$

2. Art

Nur empfehlenswert, wenn auch der Lotfußpunkt F gesucht ist. Andernfalls könnten sich für F sehr unschöne Brüche ergeben.

Der Lotfußpunkt F liegt auf g: $F(1 + 3t | 1 + 2t | 1 + 2t)$

$$\text{dann gilt: } \overline{PF} = \begin{pmatrix} 1 + 3t \\ 1 + 2t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + 3t \\ 2 + 2t \\ -14 + 4t \end{pmatrix}$$

$$\overline{PF} \text{ muss auf } \begin{pmatrix} -8 + 3t \\ 2 + 2t \\ -14 + 4t \end{pmatrix} \text{ senkrecht stehen: } \begin{pmatrix} -8 + 3t \\ 2 + 2t \\ -14 + 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -24 + 9t + 4 + 4t - 14 + 4t = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt $t = 2$.

$$\overline{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7, \text{ der Lotfußpunkt ist } F(7 | 5 | 5).$$

Aufgabe 67

Wir berechnen den Abstand des Punktes $H(9 | 5 | -5)$ der Geraden h von der Geraden g;

$$\overline{GH} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche des Parallelogramms: } 12 \cdot \sqrt{4 + 4 + 1} = 12 \cdot 3 = 36$$

$$\text{Grundlinie des Parallelogramms: } \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$\text{Abstand der Parallelen: } d = \frac{36}{3} = 12$$

(Vergleichen Sie mit Aufgabe 66 1. Art.)

Aufgabe 68

- a) Die Zylinderachse a hat die Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Radius ist gleich dem Abstand des Punktes A von der Zylinderachse. Wir benutzen wieder die Parallelogramm-Methode der Aufgabe 66.

$$\vec{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Fläche} = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$$

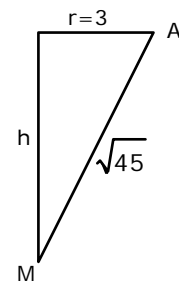
$$\text{Grundlinie } g = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \Rightarrow r = \frac{9}{3} = 3$$

- b) Die Höhe lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$\vec{MA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Länge} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45}$$

$$h^2 = 45 - 9 = 36 \Rightarrow h = 6$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 9 \cdot 6 = 54\pi$$



Aufgabe 69

Grundlage: Rhombus; im Rhombus sind die Diagonalen auch Winkelhalbierende.

Wir verlängern \vec{a} und \vec{b} so, dass sie als gleichlange Seiten eines Rhombus dienen:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \quad \vec{a}' = 3\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9$$

$$\text{Richtung der ersten Winkelhalbierenden: } \vec{a}' + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtung der zweiten Winkelhalbierenden: } \vec{a}' - \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichungen der Winkelhalbierenden: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 70

a) Die x-Koordinate wird 0:

$$g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$h': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sie stehen senkrecht aufeinander, denn: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0$

b) Wir lösen das Gleichungssystem: $\begin{cases} t = 1 - 2s \\ 1 + t = 2 + 2s \end{cases} \Rightarrow t = 1 \text{ und } s = 0 \Rightarrow S(0|1|2)$