Aufgabe 88

Am besten arbeitet man mit der Achsenabschnittsform der Ebenengleichung: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
Dabei sind – wie man sich leicht überzeugen kann - a, b und c die Achsenabschnitte der Ebene.

Also: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+3y=6$

a) Richtungsvektor der x-Achse: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; Normalenvektor der Ebene: $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=2=1\cdot\sqrt{13}\cdot\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=33.7°$ (sinus, weil Gerade und Ebene)

b) Offensichtlich $(0|2|0)$

Aufgabe 89

a) Berechnet wird der Winkel zwischen den Normalenvektoren:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\-7\end{pmatrix}=3+12-21=-6 \quad \Rightarrow \quad 6=\sqrt{14}\cdot\sqrt{94}\cdot\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=80.5°$$

b) $\begin{array}{r|l} x+2y+3z-14=0 & \cdot(-3) \\ 3x+6y-7z+6=0 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad -16z+48=0 \quad \Rightarrow \quad z=3$

eingesetzt in der ersten Gleichung: $x+2y-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=5-2y$

z. B. $y=0,\ x=5 \quad \Rightarrow \quad P_1\,(5|0|3)$

$y=1,\ x=3 \quad \Rightarrow \quad P_2\,(3|1|3)$

Gerade durch diese Punkte: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 90

Gleichung der Ebene: $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z=1$

a) Alle Winkel sind gleich, wir berechnen z. B. den Winkel zwischen E und der xy-Ebene:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1=1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=54.7°$$

b) z muss 0 sein: $x+y=1$

Aufgabe 91

a) Formel von Hesse: $\frac{2\cdot\mathbf{0}-1\cdot\mathbf{0}+2\cdot\mathbf{0}-6}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{-6}{3}=-2 \quad \Rightarrow \quad d=2$

b) Formel von Hesse: $d=\frac{2\cdot\mathbf{6}-1\cdot\mathbf{3}+2\cdot\mathbf{12}-12}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{27}{3}=9$

Aufgabe 92

Menge aller Punkte $(x|y|z)$, deren Abstand von der Ebene ± 2 ist:

$$\frac{3\cdot\mathbf{x}-2\cdot\mathbf{y}+6\cdot\mathbf{z}-5}{\sqrt{9+4+36}}=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad 3x-2y+6z-5=\pm 14 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}3x-2y+6z-19=0\\3x-2y+6z-9=0\end{array}$$

Aufgabe 93

Auf den winkelhalbierenden Ebenen liegen alle Punkte, deren Abstand von den Ebenen gleich oder entgegengesetzt gleich ist:

$$\frac{x-2y+2z-12}{\sqrt{1+4+4}} = \pm\frac{x+4y-8z-6}{\sqrt{1+16+64}}$$

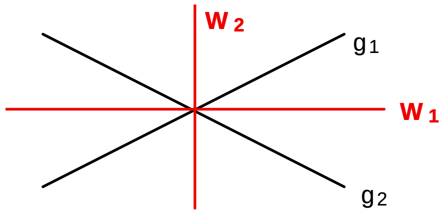
$$\frac{x-2y+2z-12}{3} = \pm\frac{x+4y-8z-6}{9} \qquad |\cdot 9$$

$$3x-6y+6z-36 = \pm(x+4y-8z-6) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} x-5y+7z-15=0 \\ 2x-y-z-21=0 \end{matrix}$$

Aufgabe 94

Die Ebenen gehen durch den Schnittpunkt der Geraden und ihre Normalenvektoren stehen je senkrecht auf der Richtung der winkelhalbierenden Geraden.

Der Schnittpunkt ist offensichtlich $(1|-1|2)$.



Winkelhalbierende Geraden (s. Aufgabe 69):

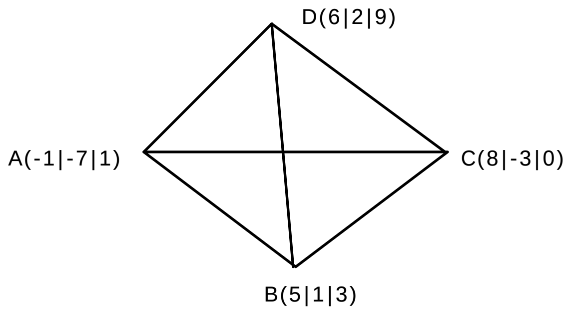
die Richtungsvektoren haben die Längen 3 und 7

also sind $7\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\14\\7\end{pmatrix}$ und $3\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\6\\9\end{pmatrix}$ gleich lang.

$$v_1 = \begin{pmatrix}14\\14\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}18\\6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\20\\16\end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix}8\\5\\4\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad W_1: \quad 8x+5y+4z = 11$$

$$v_2 = \begin{pmatrix}14\\14\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}18\\6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\8\\-2\end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad W_2: \quad 2x-4y+z = 8$$

Aufgabe 95



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) $$\vec{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{ABC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = 14 - 27 + 48 = 35 = \sqrt{194} \cdot 7 \cdot \sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = 21.0°$$

b) $$\vec{n}_{ABD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ -34 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 23 \\ -17 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{ABD} \cdot \vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 23 \\ -17 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 46 + 51 - 6 = 91 = \sqrt{819} \cdot 7 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63.0°$$

c) Grundfläche: $$G = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -16 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{16^2 + 24^2 + 48^2} = 28$$

Achtung! hier müssen Sie das ungekürzte Vektorprodukt von a) nehmen!

Für den Abstand des Punktes D von der Ebene ABC (Höhe) benötigen wir die Gleichung dieser Ebene: $2x - 3y + 6z = 25$

Höhe: $$h = \frac{2 \cdot \mathbf{6} - 3 \cdot \mathbf{2} + 6 \cdot \mathbf{9} - 25}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{12 - 6 + 54 - 25}{7} = 5$$

Damit lässt sich das Volumen elementar berechnen: $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 28 \cdot 5 = \frac{140}{3}$

Selbstverständlich können Sie das Volumen auch aus dem Spatprodukt berechnen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -16 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = -280 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{280}{6} = \frac{140}{3}$$