

Aufgabe 96

Hier muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden – mit dem Taschenrechner oder von Hand:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 9 = 0 \\ 2x + 3y - z - 3 = 0 \\ 5x - 4y + 3z - 18 = 0 \end{cases} \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y - 15 = 0 \\ 11x + 5y - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow S(2|1|4)$$

Aufgabe 97

Abstand des Punktes P von der Ebene: $\frac{2 \cdot 0 + 1 - 3 \cdot 3 - 12}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{-20}{\sqrt{14}} \Rightarrow d = \frac{20}{\sqrt{14}}$

Ein Punkt auf der Geraden hat die Koordinaten: $(2 + t | 5 + 2t | 3)$

Für den Abstand dieses Punkte von der Ebene soll gelten:

$$\frac{2 \cdot (2 + t) + (5 + t) - 3 \cdot 3 - 12}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \pm \frac{40}{\sqrt{14}}$$

$$4 + 2t + 5 + t - 9 - 12 = \pm 40$$

Daraus ergibt sich :

$$t_1 = 13 \Rightarrow (15 | 31 | 3)$$

$$t_2 = -7 \Rightarrow (-5 | -9 | 3)$$

Aufgabe 99

Die gesuchte Gerade steht senkrecht auf den Normalenvektoren der beiden Ebenen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 98

Wir arbeiten wieder mit der Formel von Hesse und setzen den Geradenpunkt $(4 - 3t | 4 - 4t | 3 + 3t)$ ein:

$$\frac{3(4 - 3t) + 4(4 - 4t) + 7}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{2(4 - 3t) - 6(4 - 4t) + 3(3 + 3t)}{\sqrt{4 + 36 + 9}}$$
$$\frac{35 - 25t}{5} = \pm \frac{-7 + 21t}{7}$$
$$7 - 5t = \pm(-1 + 3t)$$

Daraus ergeben sich: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$ und die Punkte $P_1(1 | 0 | 4)$ und $P_2(-5 | -8 | 6)$

Aufgabe 100

Wir spiegeln den Punkt A an der Ebene E.
Dann geht die Gerade A'B durch den gesuchten Punkt.

Gerade senkrecht zur Ebene durch A:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit der Ebene für

$$t + 3(-2 + t) + 2(1 + 2t) - 24 = 0$$
$$14t - 28 = 0 \Rightarrow t = 2$$

A' erhält man für $t = 4$, also $A'(4 | 10 | 9)$

Gleichung der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene E:

$$4 + 3(3 + t) + 2(-5 + 2t) - 24 = 0$$
$$-21 + 7t = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ und } X(4 | 6 | 1)$$

