

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden (ohne Lotfußpunkte):

$$\text{a) } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor einer Ebene, die zu } g \text{ und } h \text{ parallel ist: } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die Ebene gehe durch } G(-2 \mid 2 \mid -5): \quad 2x + 3y - 6z = -4 + 6 + 30 = 32$$

$$\text{Abstand des Punktes } H(-1 \mid -1 \mid 2): \quad \left| \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 2 - 32}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} \right| = \frac{49}{7} = 7$$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist 7.

$$\text{b) } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor einer Ebene, die zu } g \text{ und } h \text{ parallel ist: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die Ebene gehe durch } G(1 \mid 1 \mid 0): \quad 8x + y + 4z - 9 = 0$$

$$\text{Abstand des Punktes } H(1 \mid 4 \mid -3): \quad \left| \frac{8 \cdot 1 + 4 + 4 \cdot (-3) - 9}{\sqrt{8^2 + 1^2 + 4^2}} \right| = \frac{9}{9} = 1$$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist 1.

$$c) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor einer Ebene, die zu g und h parallel ist: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Ebene gehe durch $G(1 \mid 4 \mid 2)$: $x - 2y + 2z = 1 - 8 + 4 = -3$

Abstand des Punktes $H(2 \mid -2 \mid 0)$: $\frac{2 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist 3.