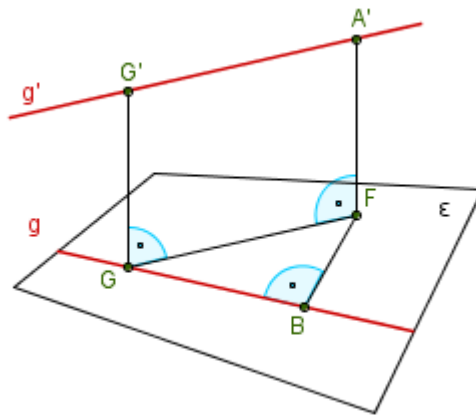


Gegeben sind die beiden Geraden  $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -22 \\ -45 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene  $\varepsilon$ , welche  $g$  enthält und zu  $g'$  parallel ist!
- Bestimmen Sie den Fusspunkt  $F$  des Lotes von  $A'(-1 \mid -22 \mid -45)$  auf die Ebenen  $\varepsilon$ ! ( $A'$  liegt auf  $g'$ !)
- Für welchen Punkt  $B$  von  $g$  hat das Dreieck  $A'FB$  die kleinste Fläche?
- $G$  liege auf  $g$ ,  $G'$  liege auf  $g'$ .  
Gesucht sind die Koordinaten von  $G$  und  $G'$ , wenn die Punkte  $A'FGG'$  ein Rechteck bilden.
- Berechnen Sie das Volumen der Pyramide mit der Grundfläche  $A'FGG'$  und der Spitze  $B$ !  
[TSME, Matur BDE, 1988]



- Die Ebene hat die Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -27 \\ -44 \end{pmatrix}$

und geht durch  $(-4 \mid -13 \mid 10)$ :  $x - 27y - 44z = -4 - 27 \cdot (-13) - 44 \cdot 10 = -93$

Gleichung der Ebene  $\varepsilon$ :  $x - 27y - 44z = -93$

- Lot von  $A'$  auf  $e$ :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -22 \\ -45 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -27 \\ -44 \end{pmatrix}$

einsetzen in  $e$ :  $(-1 + t) - 27 \cdot (-22 - 27t) - 44 \cdot (-45 - 44t) = -93 \Rightarrow t = -1$

Der Lotfusspunkt  $F$  ist:  $F(-2 \mid 5 \mid -1)$

- c) Beachten Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist und die Kathete FA' eine feste Länge hat. Die Kathete BF ist am kürzesten, wenn sie senkrecht auf g steht:

$$\text{Punkt B auf g: } B(-4 + 3t \mid -13 + 5t \mid 10 - 3t) \Rightarrow \overline{FB} = \begin{pmatrix} -2 + 3t \\ -18 + 5t \\ 11 - 3t \end{pmatrix}$$

$$\text{senkrecht, wenn: } \begin{pmatrix} -2 + 3t \\ -18 + 5t \\ 11 - 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow B(5 \mid 2 \mid 1)$$

- d)  $\overline{A'F}$  steht senkrecht auf  $\overline{FB}$  ! also ist  $\overline{GG'} = \overline{FA'}$  :

$$\begin{pmatrix} (-1 + 4s) - (-4 + 3t) \\ (-22 - 8s) - (-13 + 5t) \\ (-45 + 5s) - (10 - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -27 \\ -44 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4s - 3t = -2 \\ -8s - 5t = -18 \\ 5s + 3t = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4s - 3t = -2 \\ 5s + 3t = 11 \end{cases} \Rightarrow s = 1, t = 2 \Rightarrow G(2 \mid -3 \mid 4), G'(3 \mid -30 \mid -40)$$

- e) Mit dem Spatprodukt:  $v = \frac{1}{3} \left| (\overline{GG'}, \overline{GF}, \overline{GB}) \right|$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -27 & 8 & -5 \\ -44 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -2666 \Rightarrow V = 888 \frac{2}{3}$$