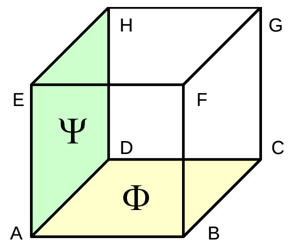
[TSME, Matur BDE, 1997 - Flü]

Von einem Würfel kennt man:
die Ebene ABCD: ϕ : $2x - y - 2z - 5 = 0$
die Ebene ADEH: Ψ : $2x + 2y + z + 4 = 0$
sowie den Punkt $F(1|0|3)$.



a) Berechnen Sie die Parametergleichung der Schnittgeraden von Φ und Ψ.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene ABFE.

c) Wie lautet die Gleichung der Ebene CDHG?

---

a) 1. Art:

Richtungsvektor: $\vec{n}_\Phi \times \vec{n}_\Psi = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad // \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ein gemeinsamer Punkt, z. B. für $z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2x - y - 5 = 0 \\ 2x + 2y + 4 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad y = -3, \quad x = 1$

Schnittgerade: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Art:

Wir setzen $z = 0$ und lösen das System $\left| \begin{matrix} 2x - y - 2t - 5 = 0 \\ 2x + 2y + t + 4 = 0 \end{matrix} \right|$ nach x und y auf:

(2) – (1) ergibt: $3y + 3t + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -3 - t$
$2 \cdot (1) + (2)$ ergibt: $6x - 3t - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 + 0.5t$

Damit haben wir: $\begin{matrix} x = & 1 + 0.5t \\ y = & -3 - t \\ z = & t \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Art:

Einen 2. gemeinsamen Punkt der Ebenen bestimmen z. B. $y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -1, \quad x = -1.5$
und aus den beiden Punkten die Geradengleichung bestimmen.

b) Die gesucht Ebene steht senkrecht auf Φ und Ψ, d.h. ihr Normalenvektor steht senkrecht auf den Normalenvektoren von Φ und Ψ.

Das haben wir unter a) berechnet: $\vec{n}_\Phi \times \vec{n}_\Psi = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Ebenengleichung hat die Form: $x - 2y + 2z = \quad$ und geht durch $F(1|0|3)$:

Gleichung der Ebene ABFE: $x - 2y + 2z = 7$

c) Die Ebene ist parallel zur eben berechneten; ihr Abstand entspricht der Länge einer Würfelkante; diese können wir auf zwei Arten berechnen:

Abstand des Punktes F von Φ
Abstand des Punktes F von Ψ

ϕ: $\quad 2x - y - 2z - 5 = 0$ und $F(1|0|3)$:

Formel von Hesse: $\left| \dfrac{2 \cdot 1 - 0 - 2 \cdot 3 - 5}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \right| = \dfrac{9}{3} = 3$

Parallelebenen zu ABFE: $x - 2y + 2z = 7$ im Abstand ± 3:

$$\frac{x - 2y + 2z - 7}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x - 2y + 2z - 7 = \pm 9$$

Es sind zwei Lösungen möglich: $x - 2y + 2z = 16$

$x - 2y + 2z = -2$