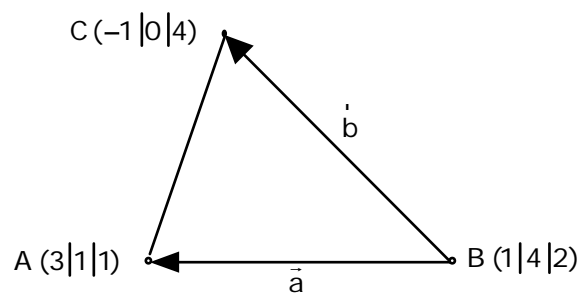


[TSME, Matur BDE, 1993 - Gub]

Gegeben ist ein Dreieck im Raum durch die Punkte $A(3|1|1)$, $B(1|4|2)$ und $C(-1|0|4)$

- Wie gross ist die Fläche des Dreiecks?
 - Wie gross ist der Dreieckswinkel bei B ?
 - Welchen Winkel bilden die Dreiecksebene und die xy -Ebene?
 - Welche Länge hat die Höhe durch C ?
 - Geben Sie einen Richtungsvektor der Höhenggeraden durch C an!
-



- Ich berechne die in der Figur gezeichneten Vektoren, weil ich diese anschliessend auch für die Aufgabe b) benutzen kann:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die Fläche des Dreiecks ist: } A = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 4 + 196} = \frac{1}{2} \sqrt{300} = 5\sqrt{3}$$

- Winkel bei B:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 12 - 2 = 6 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{24} \cdot \cos \beta \Rightarrow \beta = 70.89^\circ$$

c) Den Normalenvektor der Ebene ABC haben wir in a) berechnet: $\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Der Normalenvektor der xy-Ebene ist: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zwischenwinkel: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 = \sqrt{75} \cdot 1 \cdot \cos \gamma \Rightarrow \gamma = 36.07^\circ$

d) Berechnung aus Fläche und Grundlinie;

$$A = 5\sqrt{3} \quad \text{und} \quad |\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$A = \frac{gh}{2} \Rightarrow h = \frac{2A}{g} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{42}}{14} = \frac{5\sqrt{42}}{7} \approx 4.63$$

e) Der Richtungsvektor \vec{v} dieser Höhe steht senkrecht auf \vec{a} und, da er in der Ebene ABC liegen muss, auch senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -19 \\ 17 \end{pmatrix}$$