Bestimmen Sie die Schnittpunkte von Kreis k und Gerade g

a) $k: \; x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0 \qquad g: \; 3x + y + 5 = 0$

b) $k: \; x^2 + y^2 - 4x - 25 = 0 \qquad g: \; 3x + 7y - 35 = 0$

---

a) Wir bilden aus den beiden Gleichungen ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{r} x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{array} \right|$$

Einfachste Lösungsmethode: die 2. Gleichung nach y auflösen

$$y = -3x - 5$$

und diesen Term in der 1. Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} x^2 + (-3x - 5)^2 + 6x - 8(-3x - 5) + 25 &= 0 \\ x^2 + (9x^2 + 30x + 25) + 6x + 24x + 40 + 25 &= 0 \\ 10x^2 + 60x + 90 &= 0 \\ x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ (x + 3)(x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_2 = -3 \qquad y_1 = y_2 = 4$$

Die beiden Schnittpunkte fallen zusammen: die Gerade berührt den Kreis.

Berührungspunkt $\mathbf{B(-3|4)}$

---

b) $$\left| \begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x - 25 = 0 \\ 3x + 7y - 35 = 0 \end{array} \right|$$

Dieses System ist unangenehmer als das bei Aufgabe a). Wir erhalten Brüche, egal, ob wir die 2. Gleichung nach x oder y auflösen. Immerhin kommt aber y in der 1. Gleichung nur einmal vor, deshalb ist es vorteilhafter nach y aufzulösen:

$$\begin{aligned} 7y &= 35 - 3x \\ y &= \frac{35 - 3x}{7} \end{aligned}$$

in der 1. Gleichung eingesetzt ergibt sich:

Vorsicht!

Zuerst quadrieren, dann erst den Nenner wegmultiplizieren!

$$x^2 + \left(\frac{35-3x}{7}\right)^2 - 4x - 25 = 0$$

$$x^2 + \frac{1225 - 210x + 9x^2}{49} - 4x - 25 = 0 \qquad | \cdot 49$$

$$49x^2 + 1225 - 210x + 9x^2 - 196x - 1225 = 0$$

$$58x^2 - 406x = 0$$

$$58x(x-7) = 0$$

Diese Gleichung hat 2 Lösungen:

$x_1 = 0 \qquad y_1 = \frac{35}{7} = 5 \qquad \mathbf{S_1(0|5)}$

$x_2 = 7 \qquad y_2 = \frac{35-21}{7} = 2 \qquad \mathbf{S_2(7|2)}$

Variante ohne Bruchrechnen

Die Gleichung der Geraden in der Punkt-Steigungs-Form ist – siehe oben –

$$y = \frac{35-3x}{7} = -\frac{3}{7}x + 5$$

Daraus gewinnen wir eine Parameterform der Geradengleichung.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diese liefert uns zwei Gleichungen für x und y, die sich in die Kreisgleichung einsetzen lassen:

$$(-7t)^2 + (5+3t)^2 - 4(-7t) - 25 = 0$$

$$49t^2 + 25 + 30t + 9t^2 + 28t - 25 = 0$$

$$58t^2 + 58t = 0$$

$$58t(t+1) = 0$$

und natürlich die gleichen Schnittpunkte:

$t_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S_1(0|5)}$

$t_2 = -1 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S_2(7|2)}$