

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Kugel K: $(x-2)^2 + (y+5)^2 + z^2 = 81$ mit der Geraden g durch P(9|5|16) und Q(14|7|21).

Gleichung der Geraden g $\quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 14-9 \\ 7-5 \\ 21-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

x, y und z aus der Geradengleichung in die Kugelgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} (9+5t-2)^2 + (5+2t+5)^2 + (16+5t)^2 &= 81 \\ (7+5t)^2 + (10+2t)^2 + (16+5t)^2 &= 81 \\ (49+70t+25t^2) + (100+40t+4t^2) + (256+160t+25t^2) &= 81 \\ 54t^2 + 270t + 324 &= 0 & \quad | : 54 \\ t^2 + 5t + 6 &= 0 \\ (t+2)(t+3) &= 0 \end{aligned}$$

$$t_1 = -2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S_1(-1 | 1 | 6)}$$

$$t_2 = -3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S_2(-6 | -1 | 1)}$$