

Eine Kugel mit Mittelpunkt $M(1|2|-1)$ und Radius $r=3$ ist undurchsichtig. Können sich die Punkte $A(1|7|5)$ und $B(5|-5|-11)$ gegenseitig sehen?
 [Matur TSME 02, Aufgabe 2b]

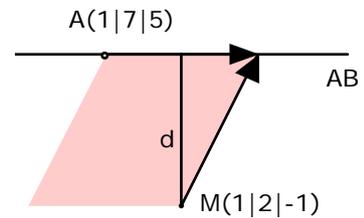
Gleichung der Geraden AB:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten die Aufgabe zu lösen:

- Wir bestimmen den Abstand des Mittelpunktes von der Geraden AB:

Fläche des Parallelogramms:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \sqrt{4 + 36 + 25} = \sqrt{65}$$



Grundlinie des Parallelogramms:
$$\sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}$$

Der Abstand $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{26}}$ ist kleiner als der Kugelradius 3, die Punkte sehen sich nicht.

- Wir prüfen, ob sich Kugel und Gerade schneiden:

Kugelgleichung:
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Koordinaten aus der Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} (1 - t - 1)^2 + (7 + 3t - 2)^2 + (5 + 4t + 1)^2 &= 9 \\ (-t)^2 + (5 + 3t)^2 + (6 + 4t)^2 &= 9 \\ 26t^2 + 78t + 52 &= 0 \\ t^2 + 3t + 2 &= 0 \\ (t + 2)(t + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt zwei Schnittpunkte, die Gerade durchstösst die Kugel.