

Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel K, die parallel zur Ebene E sind.

$$K: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 49 \quad E: 3x + 2y - 6z = 0$$

Wir legen eine Gerade senkrecht zur Ebene E durch den Mittelpunkt $M(3|1|-2)$ der Kugel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

und bestimmen die Schnittpunkte der Kugel mit dieser Geraden:

$$\begin{aligned} (3 + 3t - 3)^2 + (1 + 2t - 1)^2 + (-2 - 6t + 2)^2 &= 49 \\ 9t^2 + 4t^2 + 36t^2 &= 49 \\ 49t^2 &= 49 \\ t^2 &= 1 \\ t &= \pm 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Berührungspunkte:

$$\begin{aligned} t_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} && B_1(6|3|-8) \\ t_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} && B_2(0|-1|4) \end{aligned}$$

und die gesuchten Gleichungen der beiden Tangentialebenen.

$$\begin{array}{ccccccc} 3x + 2y - 6z = 18 + 6 + 48 & \Rightarrow & \mathbf{3x + 2y - 6z = 72} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 6 & 3 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3x + 2y - 6z = 0 - 2 - 24 & \Rightarrow & \mathbf{3x + 2y - 6z = -26} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & -1 & 4 \end{array}$$