

[TSME, Matur BDE, 1989]

Die beiden Punkte $A(0|-2|5)$ und $B(6|4|9)$

sowie die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ seien gegeben.

- Auf der Geraden g liegt der Mittelpunkt M einer Kugel k , welche durch die beiden Punkte A und B geht. Wie lautet die Gleichung von k ?
 - Wie gross ist der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Geraden durch A und B ?
 - Wie lang ist der Kreisbogen AB mit Kreismittelpunkt ?
-

- Die Mittelpunkte aller Kreise, die durch die Punkte A und B gehen liegen auf der Symmetrieebene der beiden Punkte:

Ebene normal zu $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ durch $M_{AB}(3|1|7)$: $E: 3x + 3y + 2z = 26$

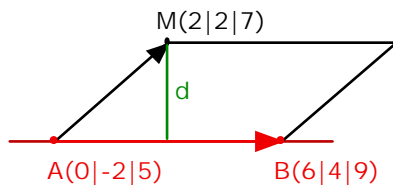
Schnitt von E und g ergibt den Mittelpunkt:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 + 3 \cdot t + 2 \cdot (3 + 2t) &= 26 \\ t &= 2 \quad M(2|2|7) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r^2 = 16 + 4 + 4 = 24$$

Kugelgleichung: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 7)^2 = 24$

b)



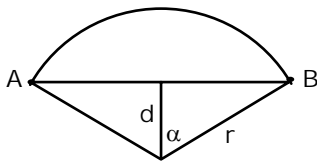
$$\vec{AB} \times \vec{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow F_{\text{Parallelogramm}} = \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44}$$

Länge der Grundlinie: $g = |\vec{AB}| = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$

Der Abstand des Mittelpunktes von AB ist: $d = \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{22}} = \sqrt{2}$

d könnte auch einfacher mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden!

c)



$$\cos \alpha = \frac{d}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow \alpha = 73.22^\circ$$

$$b = 2 \cdot \frac{2r \pi \alpha}{360^\circ} = 12.52^\circ$$